Integraalifunktio sekä polynomifunktion, yhdistetyn funktion ja trigonometristen funktioiden integrointi lukion pitkässä matematiikassa

Pro gradu -tutkielma
Josefiina Kulmala
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2021

Sisällys

1 Johdanto

Kouluissa opettajat huolehtivat monesti turhankin paljon oppilaidensa oppimisesta. Oppilaiden on osattava asettaa tavoitteita, työskennellä pitkäjänteisesti, reflektoida omaa oppimista, mahdollisesti muokata omia oppimisstrategioitaan sekä selviytyä oppimisessa ilmenevistä vaikeuksista. Itsenäinen tavoitteiden asettaminen ja niihin tähtääminen on tulevaisuuden menestymisen kannalta parasta. Huomionarvoista on se, että passiivisten tiedon vastaanottajien sijaan opiskelijat olisivat aktiivisia oppijoita, jotka rakentavat tietämystään aikaisemmin opittujen asioiden ja uusien kokemusten pohjalta. [12] Nykyisin lukio-opinnoissa erityisesti matematiikan oppiaineessa painotetaankin opiskelijoiden kriittisen ajattelun, tutkivan ja kokeilevan oppimisen kehittämistä[16].

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston Avoin oppikirja -projektia, jossa tuotetaan oppimateriaalia lukion pitkän matematiikan kursseille. Tässä tutkielmassa keskitytään lukion pitkän matematiikan kurssiin MAA7: Integraalilaskenta. Oppimateriaali pohjautuu uuden (2019) opetushallituksen Lukion opetussuunnitelman perusteiden tavoitteisiin. Tutkielma sisältää johdattelun integraalifunktion käsitteeseen sekä polynomifunktion, yhdistetyn funktion ja trigonometristen funktioiden integroinnin. Integraalien opetus tulisi olla monipuolista, jotta oppilaiden ongelmia voitaisiin tunnistaa ja analysoida eri tilanteissa [4].

Tutkielma koostuu perusteluosasta, varsinaisesta oppimateriaalista, opettajan oppaasta ja harjoitustehtävien vastauksista. Oppimateriaalin tavoitteet pohjautuvat opetussuunnitelman lisäksi projektiryhmän kanssa valittuihin tieteellisten artikkelien tavoitteisiin. Lisäksi perusteluosassa esitellään oppimateriaalin tavoitteet ja tehtävätyypit sekä oppimateriaaliin valittujen tehtävien perustelut. Tehtävätyypit valittiin yhdessä projektiryhmän kanssa tieteellisiin artikkeleihin nojaten.

Oppimateriaalissa hyödynnetään tieteellisistä artikkeleista esille tulleita integraalin oppimisen ongelmakohtia ja virhekäsityksiä. Näiden tietojen ja perustelujen pohjalta on rakennettu oppimateriaali johdattelevien pohdintatehtävien ympärille. Pohdintatehtävien tavoitteena on perinteiseen matematiikan opetukseen verrattuna haastaa monipuolisesti opiskelijoita miettimään, keskustelemaan ja perustelemaan matemaattisia ongelmia. Opiskelija on siis itse aktiivisen oppijan roolissa ja opettajan tehtävänä on ohjeistaa sekä tukea sopivalla tavalla oppilaita. Pohdintatehtävät toimivat tuntitehtävinä oppitunneilla, joilla teorian opetus tapahtuu. Kappaleiden lopussa olevat harjoitustehtävät on tarkoitettu lähinnä kotitehtäviksi ja niiden vastaukset löytyvät oppimateriaalin lopusta. Oppimateriaali sisältää myös opettajan oppaan, jossa on ajankäyttösuunnitelma ja kappaleiden oppimistavoitteet sekä pohdintatehtävien ratkaisut ja käytännön vinkit.

Nykyisin lukio-opinnoissa ja ylioppilaskirjoituksissa painotetaan sähköisten apuvälineiden käyttöä. Erityisesti ylioppilaskirjoitukset ovat nykyään montaa aihepiiriä yhdistäviä ja soveltavia kokeita [26, 27]. Tämän vuoksi oppimateriaalissa huomioidaan integraalin yhteys muihin tieteisiin ja pyritään monipuolisen opetuksen kautta luomaan syvällinen ymmärrys integraalin käsitteestä.

2 Oppikirjan tavoitteet

Tässä luvussa tarkastellaan tämän oppikirjan tavoitteita, jotka pohjautuvat vuoden 2019 Lukion opetussuunnitelman perusteisiin [16]. Integraalilaskennan oppikirjaprojektin osallistujien kanssa valittiin oppilaille oppimistavoitteita *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* artikkelista [2]. Tämän oppikirjan pohdinta-ja harjoitustehtävät pohjautuvat näihin tavoitteisiin sekä artikkelista *Collaborative learning in Mathematics* valittuihin tehtävätyyppeihin [19].

2.1 Opetussuunnitelman tavoitteet

Lukion opetussuunnitelman perusteissa 2019 esitetään säädökset ja tavoitteet lukiokoulutukselle [16]. Niissä määritellään yleisesti matematiikan oppiaineen ja opetuksen tavoitteita. Matematiikan opetuksen tavoitteena on tuoda oppilaille matemaattisen ajattelun malleja ja kehittää oppilaan laskemisen ja ongelmanratkaisun taitoja. Ratkaisujen perustelemista ja tuloksen oikeellisuuden tarkastelua pyritään tukemaan opetuksen kautta. Kun vertaillaan aikasempaa Lukion opetussuunnitelman perusteita vuodelta 2015 [15] huomataan, että uudessa opetussuunnitelmassa painotetaan näiden tavoitteiden lisäksi väitteiden perustelemista. Myös vuorovaikutusosaamista ja matemaattisen osaamisen tärkeyttä jatko-opinnoissa korostetaan uudessa opetussuunnitelmassa aikasempaan verrattuna. Oppilaiden luovaa ja tutkivaa ajattelua pyritään kehittämään kokeilevan työskentelyn kautta. Opetuksen tavoitteena on tuoda esille matematiikan merkitystä eri aloilla ja yhteyttä muihin oppiaineisiin. Lisäksi matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaiden matemaattisten menetelmien, ohjelmistojen ja tietolähteiden käyttöä.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa määritellään myös pitkän matematiikan kurssikohtaiset tavoitteet. Uudessa opetussuunitelmassa integraalilaskennan kurssi eli 7. kurssi toimii jatkokurssina derivaattakurssille, kun taas vanhemmassa opetussuunnitelmassa se on vasta 10. kurssi [15, 16]. Tämä voi vaikuttaa myönteisesti derivaattakäsitteen liittämiseen integraaleihin.

Integraalilaskennan MAA7 tavoitteena opiskelija:

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen ja oppii määrittämään yksinkertaisten funktioiden integraalifunktioita
- ymmärtää määrätyn integraalin käsitteen ja sen yhteyden pinta-alaan sekä tutustuu numeeriseen menetelmään määrätyn integraalin määrittämisessä
- osaa määrittää pinta-aloja ja tilavuuksia määrätyn integraalin avulla
- perehtyy integraalilaskennan sovelluksiin
- saa käyttää ohjelmistoja funktion ominaisuuksien tutkimisessa, integraalifunktion määrittämisessä, määrätyn integraalin laskemisessa sovellusten yhteydessä

sekä numeerisessa integroinnissa.

Tässä oppikirjassa näistä tavoitteista käydään läpi integraalifunktion käsitteen ymmärtäminen, yksinkertaisten funktioiden integrointi ja integraalilaskennan sovelluksiin tutustuminen. Opiskelijoille opetetaan ohjelmistojen käyttöä funktion ominaisuuksien tutkimisessa ja eri integraalifunktioiden määrittämisessä. GeoGebra- ohjelmiston käyttöä opetetaan opiskelijoille, sillä sitä pystytään hyödyntämään niin laskennallisessa kuin graafisessa ratkaisemisessa. Lisäksi sähköisissä matematiikan kokeissa ja ylioppilaskirjoituksissa GeoGebra on yksi on sallituista ohjelmistoista.

Lukion opetussuunnitelman perusteiden määräämät keskeiset sisällöt integraalilaskennalla ovat:

- integraalifunktio ja tärkeimpien alkeisfunktioiden integrointi
- määrätty integraali
- suorakaidesääntö
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen.

Tämän oppikirjan aihealueet sisältävät keskeisistä sisällöistä integraalifunktion ja tärkeimpien alkeisfunktioiden integroinnin. Lisäksi hyödynnetään aikaisemmalla derivaatta-kurssilla opittuja tietoja ja taitoja. Näiden yleisten tavoitteiden, kurssitavotteiden ja sisältötavotteiden pohjalta voidaan oppilaiden opetuksessa hyödyntää tämän oppikirjan pohdinta- ja harjoitustehtäviä.

2.2 Habits of mind- tavoitteet

Matematiikan opetus on aikaisemmin keskittynyt valmentamaan oppilaiden laskennallista osaamista. Kuitenkin matemaattista ajattelua tarvitaan niin arkielämässä kuin lukion jälkeen monessa ammatissa, ja matematiikan opetusta on lähdetty kehittämään. Jos halutaan tukea opiskelijoita näkemään, käyttämään ja hyödyntämään matematiikkaa tulevaisuudessa myös koulun jälkeen, on keskitytttävä kehittämään niin peruskoulussa kuin lukiossa matemaattisia ajattelutapoja ja ongelmanratkaisutaitoja, eikä niinkään ratkaisuissa tuloksen tarkasteluun. [2] Nykysin myös ylioppilaskokeissa vaaditaan vastaavanlaista osaamista, sillä tehtävät mittaavat oppilaiden kykyä perustella ratkaisujaan, vertailla valmiita ratkaisuja, korjata virheitä ja yhdistellä useamman kurssin asioita [26, 27].

Artikkeli *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* esittelee muutamia ajattelutottumuksia, joiden kehittämiseen matematiikan opetuksen tulisi opiskelijoita valmentaa. Artikkeli esittelee kahdeksan tavoitetta opiskelijoille. Opiskelijoiden tulisi olla säännönmukaisuuksien etsijöitä (*pattern sniffers*), kokeilijoita (*experimenters*), kuvailijoita (*describers*), nikkareita (*tinkerers*), keksijöitä (*inventors*), visualisoijia (*visualizers*), hypoteesien muodostajia (*conjecturers*) sekä arvailijoita (*guessers*).

Lukion opetussuunnitelman 2019 tavoitteiden [16] lisäksi valittiin Integraalioppikirjaprojektiin osallistujien kanssa artikkelin *Habits of mind: An organizing principle* *for mathematics curricula* [2] tavoitteista neljä integraalioppikirjan tavoitteiksi.

Kokeileminen
Opiskelijoiden tulisi kokeilemisen kautta lähestyä tehtävän ratkaisemista. Hänellä ei tarvitse olla tiedossa oikeaa ratkaisutapaa, vaan parametreja muuttamalla opiskelija voisi testailla ja tarkastella esimerkiksi funktion käyttäytymistä. Tätä tavoitetta hyödynnetään pohdintatehtävissä sekä tehtävissä, jotka pohjustavat lauseita ja määritelmiä. Myös GeoGebran liukusäädin -ominaisuutta hyödyntämällä opiskelijat voivat lähestyä tehtäviä kokeilun kautta.

Kuvaileminen
Opiskelijoiden tulisi pystyä kuvailemaan tekemiensä ratkaisujen vaiheita ja perusteluja niin kirjallisesti kuin suullisesti myös muille opiskelijoille. Kuvailemisen ja sanallisen perustelun kautta opiskelija vahvistaa metakognitiivista tietoisuutta eli tietoa omasta ajatteluprosessista. Tämän kaltainen tavoite näkyy konkreettisesti nykyisissä matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, joissa opiskelijaa pyydetään sanallisesti perustelemaan ja selittämään tekemiään välivaiheita ja havaintoja sekä ilmiöitä.

Visualisoiminen
Opiskelijoiden tulisi osata visualisoida matemaattisia sisältöjä kuvaajien ja taulukoiden avulla. Erityisesti numeerisia ja algebrallisia laskutoimituksia tulisi visualisoida kuvaajan avulla. Kuvaajien ei välttämättä tule olla keskeinen osa tehtävän ratkaisua, vaan ne voisivat olla tukena tehtävän ratkaisussa. Opiskelijoiden tulisi myös visualisoinnin kautta hallita eri matemaattisten aiheiden suhteita, kuten integraalin ja derivaatan yhteyden. Lisäksi kuvaajien kautta voidaan tarkastella funktion muutosta tietyllä välillä. Matematiikan visualisoinnin yhteydessä on ohjelmistoilla iso rooli. Ohjelmistojen avulla voidaan tehdä kuvaajia ja taulukoita, joita voidaan hyödyntää tehtävän ratkaisemisessa. Yksi käytyin ohjelmisto visualisointiin on GeoGebra, jonka avulla oppilas pystyy ratkaisemaan tehtävän esimerkiksi ylioppilaskirjoituksissa ilman käsin laskemista. Opetuksessa on tärkeää tuoda esille, mitä GeoGebra -ratkaisussa pitää näkyä ja opettaa käytännössä Geogebran käyttöä. Pohdintatehtävissä käytetään visuaalista näkökulmaa tarkastelussa, ja opiskelijoita ohjataan visuaalisuuden hyödyntämiseen omissa ratkaisussaan. Samalla lisätään ymmärrystä aiheeseen.

Arvaaminen
Arvaileminen liittyy läheisesti kokeilemiseen. Matemaattisen ongelman ratkaisun edessä opiskelija voi lähteä liikkeelle tekemällä yksinkertaisen arvauksen, joka auttaa lopulta löytämään lähemmäs haluttua lopputulosta. Arvailujen aikana opiskelijat löytävät usein uusia oivalluksia, strategioita ja lähestymistapoja matemaattisia ongelmia kohdatessaan. Tässä oppikirjassa lähdetään arvailun kautta lähestymään integraalilaskentaa.

2.3 Collaborative learning in mathematics- tehtävätyypit

Tämän oppikirjan aihealueita lähestytään pohdintatehtävien kautta, joissa opiskelijoita kannustetaan oman pohtimisen ja havainnoinnin kautta tarkastelemaan lähestyvää asiaa. Oppimateriaalin tehtävät on valittu Swanin artikkelin *Collaborative learning in* *mathematics* [19] tehtävätyyppien mukaisesti. Artikkelissa esitetään perinteisen matematiikan opetustavan koostuvan valmiista selityksistä ja esimerkeistä, joita tehtävissä harjoitellaan. Artikkelissa esitetyn tutkimuksen mukaan monet opiskelijat näkevät matematiikan tiettyinä, ulkoaopeteltavina toimintoina ja tekniikoina. Perinteinen tapa ei kehitä opiskelijoiden ajattelua laajempaan ja soveltamanpaan suuntaan. Artikkelissa esiteltyjen tehtätyyppien tavoitteena on auttaa opiskelijoita omaksumaan aktiivisempia lähestymistapoja oppimiseen. Lisäksi artikkelin tavoitteena on kannustaa opiskelijoita keskustelemaan keskenään ja selittämään ideoitaan sekä ajatuksiaan. Myös olemassa olevan tiedon soveltamista ja arviointia korostetaan.

Integraalioppikirjan tehtävätyypeiksi valittiin artikkelista seuraavat tehtävätyypit
Eri esitystapojen yhdistäminen ja vertailu (*interpreting multiple representations*)

Matemaattisesti asiat voidaan esittää usealla eri tavalla, kuten lukujen, kaavioiden, kuvaajien ja symbolien avulla. Nämä erilaiset esitystavat antavat opiskelijoille mahdollisuuden rakentaa merkityksiä ja suhteita eri matemaattisten käsitteiden välille. Useimmiten keskitytään teknisiin laskemistaitoihin kuten kaavojen käyttämiseen, mutta artikkelin mukaan on myös tärkeää antaa oppilaille mahdollisuus merkitysten pohtimiseen ja vertailuun. Eri esitystapoja hyödyntävässä opetuksessa voidaan havaita opiskelijoiden virhekäsityksiä ja niistä voidaan keskustella yhdessä muun luokan kanssa.

Virheiden analysointi ja korjaus (*correcting mistakes in reasoning*) Artikkelissa ehdotetaan opetustapoja, joilla opiskelijoiden vastauskeskeisyys saadaan muutettua suuntaan, jossa opiskelijat analysoivat ja vertailevat erilaisia päättelyketjuja. Yksi tälläinen opetustapa on virheiden analysointi ja niiden korjaaminen. Tällöin opiskelija tulkitsee muiden tekemiä ratkaisuja, tunnistaa mahdolliset virheet ja korjaa ne. Hän asettuu siis kriittiseen ja neuvovaan rooliin. Samalla oppilas havaitsee yleisimpiä virheikäsityksiä ja siten voi itse välttää ne. Nykyisin matematiikan ylioppilaskirjoituksissa voidaan pyytää kokelasta tarkastelemaan päättelyketjua, korjaamaan virheitä ja perustelemaan niitä. [19]

3 Perusteluosa

3.1 Integraali derivaatan käänteisoperaationa

Lukion pitkässä matematiikassa derivaatta ja integraali ovat tärkeimpiä matemaattisia käsitteitä [7]. Erityisesti integraalien ymmärtäminen on tärkeä aihe, koska integraalit toimivat perustana moniin reaalimaailman sovellutuksiin ja myöhempiin kursseihin sekä jatkokoulutuksessa [9]. Useamman tutkimuksen mukaan opiskelijoilla on kuitenkin vaikeuksia derivaattojen ja integraalien oppimisessa [7, 4, 11, 18].

Integraalilaskenta sisältää funktioiden integraalien määrittämistä, niiden sovelluksia ja ominaisuuksien ymmärtämistä. Tilastollisten havaintojen perusteella opiskeljat kokivat vaikeuksia integrointikaavojen käyttämistä integrointitehtävissä,joka edellyttää opiskelijoiden kykyä operoida funktioita. Opettajien tulisi tarkastella opiskelijoiden aiempaa tieto- ja taitopohjaa ennen monimutkaisemman matemaattisen aiheen esittelyä. [4] Tässä oppikirjassa integraalilaskentaa lähdetään harjoittelmaan pohdintatehtävässä A.1 hyödyntämällä jo opittuja tietoja ja taitoja derivaatan suhteen. Matemaattinen ajattelu on aktiivinen ja monimutkainen prosessi, johon kuuluu ajatusten keskittämistä, arvailua ja yleistämistä. Näiden kautta opiskelijoiden ymmärrys lisääntyy. [11] Tutkimuksissa on havaittu, että oppilailla ilmenee haasteita matemaattisissa ongelmissa, jos heillä ei ole kykyä käyttää aikaisempaa tietoa uuden matemattisen aiheen yhteydessä [7, 11]. Tämä näkökulma otetaan huomioon ensimmäisessä kappaleessa sekä erityisesti ensimmäisissä pohdintatehtävissä A.1 ja A.18 derivaatan liittämisenä integraalin tarkasteluun.

Artikkelissa *Analysis of students' difficulties in solving integration problems* esiteltiin oppilailla esiintyviä käsitteellisiä virheitä integraalin yhteydessä [11]. Käsitteelliset virheet johtuvat matemaattisen ongelmaan liittyvien käsitteiden ymmärtämättä jättämisestä tai virheistä, jotka johtuvat ongelman sisältämien suhteiden väärinymmärryksistä, kuten derivaatan ja integraalin yhteyden ymmärtämisestä. Lisäksi osa opiskelijoista sekoittaa herkästi integraalin derivaattaan. Näiden kahden käsitteen vertailun avulla voidaan ehkäistä sekoittamiseen liittyvät virheet. [11] Matemaattisten käsitteiden ja menetelmien konseptuaalinen ymmärtäminen on tärkeä tavoite pitkän matematiikan opiskelijoille, sillä asiakokonaisuuksien ymmärtäminen vähentää opiskelijan tarvetta muistaa asioita ulkoa sekä mahdollistaa vaativienkin tehtävien ratkaisemisen soveltamalla ja yhdistelemällä opittuja tietoja. [10] Myös Lukion opetussuunnitelmassa 2019 [16] matematiikan laaja-alaisen osaamisen yhdeksi tavoitteeksi määritellään matemaattisten käsitteiden merkitysten hahmottaminen ja laajempien kokonaisuuksien yhteyden ymmärtäminen matematiikassa ja muissa oppiaineissa. Tutkimustulosten perusteella tulisi opiskelijoiden peruskäsitteiden ymmärtämistä painottaa enemmän kuin vain integraalin laskusääntöjen ja kaavojen käyttämistä [11]. Pohdintatehtävä A.1 aloitetaan ensin helpolla funktiolla, jonka jälkeen siirrytään vaikeampaan polynomifunktioon. Pohdintatehtävä pohjautuu *Habits of mind*- artikkelissa esiteltyihin tavoitteisiin, arvailuun ja kokeilemiseen, ja toimii johdatteluna integraalifunktioon.

Integraalien oppimisessa ilmenevien vaikeuksien ratkaisuksi on ehdotettu matemaattisen ajettelun ja yleistämisen lisäämistä. Yleistämisen käyttö voi ohjata välttämään matemattisten aiheiden erottavaa ajattelua ja käyttämään laajempaa, aihealueita yhdistävää ja symbolisempaa näkökulmaa. Yleistystä voidaan käyttää aikaisempien tietojen muistamiseen ja yhteyksien luomiseen käsitteiden välillä, jolloin voidaan muistella aiempaa tietämystä uusia matemaattisia ongelmia kohdatessa, esimerkkinä derivaatan tietämyksen hyödyntäminen integraalien yhteydessä. [7] Pohdintatehtävässä A.4 2. kohdassa GeoGebra-ohjelmiston avulla valitut kuvat piirretään koordinaatistoon ja tarkastellaan, miten yleinen muoto voidaan muodostaa funktion integroinnista.

Oppilailla on integraalien oppimisessa vaikeuksia algebrallisen ja graafisen näkökulman yhteyden ymmärtämisessä. Osa vaikeuksista voisi johtua opiskelijoiden heikosta ongelmanratkaisutaidosta, jonka taustalla on opetuksessa graafisen näkökulman vähäisyys suhteessa algebralliseen näkökulmaan. [7] Muutamissa tutkimuksissa havaittiin opiskelijoiden keskittyvän enemmän integrointimenetelmiin kuin käsitteelliseen ymmärrykseen [11, 23]. Vaikka opiskelijat suhtautuivat yleensä myönteisesti integraalitehtävän ratkaisemiseen, he halusivat vain muistaa kaavat ongelmien ratkaisemiseksi mahdollisimman pienellä ymmärryksellä, koska he eivät pitäneet käsitteiden ymmärtämistä tärkeänä saadakseen matematiikasta hyviä arvosanoja. [11] Integraalien opetukseen tulisi sisällyttää graafisia kuvia tehtäviin liittyen. Tutkimusten tulosten perusteella kuvaajien käyttäminen helpottaa ymmärtämistä ja havainnollistaa oppilaille peruskäsitteitä. Visuaalista ajattelua matematiikassa tulisi edistää luomalla yhteyksiä funktioiden ja niiden kuvaajien välille. Visuaaliset havainnollistukset todella helpottavat opiskelijoiden ymmärrystä laskukäsitteistä. [11]

Tekniset apuvälineet ovat merkittäviä opiskelijoiden ymmärtämisen kehittäjiä integraalin suhteen ja niillä on keskeinen rooli matemaattisessa ajattelussa. [20] Käsitettä tekniset apuvälineet tarkennettiin uudessa Lukion opetussuunnitelman 2019 perusteissa ohjelmistoiksi [15, 16], joten käytetään tästä eteenpäin käsitettä ohjelmistot. On havaittu, että ohjelmistot ovat hyödyllisiä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa, koska niiden avulla visualisomalla voidaan kehittää opiskelijoiden matemaattisten määritelmien ja käsitteiden ymmärrystä [20, 22]. Artikkelissa *On visualisation problemsby using the geogebra and scientific workplace packages* esitellyssä tutkimuksessa tehtävät tehtiin ensin algebrallisesti ja sitten GeoGebran avustuksella. GeoGebran avusta huolimatta osa oppilaista ei osannut ratkaista tehtävää. Yhtenä selityksenä on, että GeoGebralla tehtävien ratkaiseminen oli oppilaille uutta. Näin ollen tehtävien ratkaiseminen GeoGebralla ja muilla ohjelmistoilla tulisi sisällyttää opetukseen, jotta niiden käyttäminen olisi kaikille oppilaille tuttua. [22]

Pohdintatehtävässä A.4 opiskelija havaitsee integroimisvakion merkityksen piirrettyään Geogebra-ohjelmiston avulla funktion integraalifunktiot samaan koordinaatistoon. Opettajalla on tärkeä rooli GeoGebran käytön opastuksessa, jotta esimerkiksi opiskelija osaa hyödyntää liukusäädin -ominaisuutta. Lisäksi pohdintatehtävässä A.4 oppilas tarkastelee funktion integraalifunktioita algebrallisesti ja graafisesti, sillä tutkimusten [11, 22] mukaan osa opiskelijoista unohti integraalitehtävien yhteydessä lisätä integroimisvakion c määräämättömään integraaliin. Opettajia kehoitetaankin opetuksessa korostamaan vakion c merkitystä [11, 20]. Artikkelissa *Profile of metacognition of mathematics and mathematics education students in understanding the concept ofintegral calculus* esitellyn tutkimuksen mukaan oppilaat ymmärsivät määräämättömän integraalin ja integroimisvakion merkityksen, sillä heidät pyydettiin derivoimaan kolme eri funktiota, jolloin vastauksessi saatiin samat funktiot. Tämän jälkeen saatu funktio pyydettiin integroimaan, jolloin oppilaat huomasivat lisätä integroimisvakion c vastaukseen. [14] Tätä oppimisstrategiaa hyödynnetään pohdintatehtävissä A.4, A.5 ja A.6.

Pohdintatehtävässä A.5 tarkastellaan vielä eri näkökulmasta integroimisvakiota. Opiskelijan tulee Lukion opetussuunnitelman 2019 [16] tavoitteiden mukaisesti tarkastella väitteiden paikkansapitävyyttä. Väitteissä esiintyy integraalifunktioita ja integraalifunktioiden derivaattojen summia ja erotuksia, jolloin oppilas joutuu tarkasti miettimään, mitä väitteessä kerrotaan ja pitääkö se paikkansa. Jatkotehtävänä toimii hyvin pohdintatehtävä A.6, jossa tarkastellaan väitteiden paikkansa pitävyyttä annettujen funktioiden kautta ensin laskennallisesti ja sen jälkeen GeoGebran avulla. Näin muodostuu ajatus graafisen ja algebrallisen näkökulman yhteydestä [7]. Eri pohdintatehtävien A.4, A.5 ja A.6 kautta opiskelija oppii ymmärtämään integroimisvakion merkityksen. Lisäksi esimerkin A.9 avulla opiskelija oppii tietyn integraalifunktion määrittämisen. Pohdintatehtävässä A.10 opiskelija oppii monomifunktion integroimisen, jonka jälkeen yksinkertaiset monomifunktiot on helppo ratkaista. Ensimmäisen osion harjoitustehtävistä A.1 on ylioppilaskirjoituksissa esiintyneitä tehtäviä, jolloin opiskelija saa käsityksen perustason integraalitehtävien esiintymisestä ylioppilaskirjoituksissa.

3.2 Polynomi- ja yhdistetyn funktion integrointi

Polynomi- ja trigonometristen funktioiden integroimisessa hyödynnetään aikaisemmin esiteltyä lähestymistapaa, integraalia derivaatan käänteisoperaationa. Hyödynnetään samaa näkökulmaa myös vakiolla kerrotun integraalin ja summan integroinnin havannollistamiseen pohdintatehtävissä A.12 ja A.14. Opiskelija GeoGebraa hyödyntämällä tarkastelee eri funktioiden kuvaajia ja vertailee niitä keskenään. Lopuksi opiskelija todistaa derivaatan avulla lauseet.

Artikkelin *Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment* tutkimuksessa tarkastellaan oppimismenetelmiä, joilla parannetaan lukiolaisten määräämättömän integraalin graafista näkökulmaa. [21] Tutkimuksessa [6] funktion kuvaajaa ja integraalifunktion kuvaajaa vertaillaan keskenään ja tarkastellaan eri väleillä tapahtuvaa muutosta. Tutkimus antaa näkökulmaa opettajille haastavien tehtävien suunnitteluun, jolloin oppilaiden käsitteellinen ymmärtäminen ja matemaattinen ajattelu kehittyvät. Matematiikan opetuksessa tulisi ottaa enemmän käyttöön kahden samanaikaisesti muuttuvan suureen kuvaajien havainnointia hetkellisen muutosnopeuden eli derivaatan suhteen, jolloin kehitetään opiskelijoiden käsitteellistä ymmärrystä integrointimenetelmistä. [6] Artikkelin *Students' Covariational Reasoning in Solving Integrals' Problems* tutkimuksessa opiskelijoille annettiin kuvaaja, jossa esitettiin altaassa tapahtuvaa veden vaihtuvuutta tietyssä ajassa, joka vastaa kiihtyvyyden käsitettä. Opiskelijoiden tuli esittää nopeus ajan funktiona, kun veden vaihtuvuus oli yhtä suuri kuin nopeuden derivaatta. Kuitenkin opiskelijoilla näytti olevan vaikeuksia muodostaa kuvaaja jatkuvasti muuttuvalle nopeudelle, eivätkä he pystyneet soveltamaan integrointimenetelmiä. [6] Pohdintatehtävässä A.22 oppilas tarkastelee tietyillä aikaväleillä kiihtyvyyttä ja päättelee sen perusteella, millainen nopeus maantiepyöräilijällä on ollut ja muodostaa jatkuvasti muuttuvan nopeuskuvaajan. Harjoitustehtävässä 9 funktion $f(x)$ kuvaajan perusteella pyydetään opiskelijaa muodostamaan integraalifunktion kuvaaja. Näin vahvistetaan pohdintatehtävässä A.22 opittua asiaa.

Artikkelissa *Best know problem solving strategies in 'high-stakes' assesments* [8] esitellään opiskelijoiden ongelmanratkaisutaitojen kehittämiseen ohjeistuksia. Eräs tapa on kuvaajien piirtäminen ja esimerkiksi derivaattafunktion kuvaajan sekä funktion kuvaajan tulkitseminen. Tätä näkökulmaa hyödynnetään pohdintatehtävissä A.16, A.18 ja A.22 . Pohdintatehtävässä A.16 opiskelija yhdistää funktion kuvaajan sopivan integraalifunktion kuvaajan kanssa. Pohdintatehtävässä A.18 opiskelija joutuu miettimään funktion ja integraalifunktion yhteyttä ja erityisesti kuvaajien välistä yhteyttä. Tämän lisäksi hän joutuu perustelemaan, minkä vuoksi kuvaajassa ei ole kyseisen funktion integraalifunktio. Lukion opetussuunnitelman 2019 perusteiden [16] tavoitteiden mukaista on, että opiskelija oppii ratkaisujen perustelemista ja tuloksen oikeellisuuden tarkastelua.

Fysiikkaa yhdistävässä pohdintatehtävässä A.22 annetun kiihtyvyyden kuvaajan kautta tulee selvittää maantiepyöräilijän nopeus eri aikaväleillä. Integraalilaskennan ymmärtämisestä on hyötyä fysiikan opiskelussa, sillä integrointia sovelletaan moniin reaalimaailman ongelmiin, erityisesti fysiikan tai kinematiikan ongelmiin [9, 11]. Esimerkiksi kappaleen nopeuden avulla voidaan selvittää kuljettua matkaa tai voidaan laatia väestön kasvunopeudesta väestöennusteita. Fysiikan näkökulman yhdistävässä integraalien opetuksessa voidaan hyödyntää kuvaajia; nopeuden ja kiihtyvyyden tarkastelussa v-t- ja a-t-kuvaajia [11]. Lukion opetussuunnitelman 2019 [16] matematiikan yhdeksi tavoitteeksi on asetettu matematiikan merkityksen korostaminen muissa oppiaineissa ja muilla aloilla.

Artkkelissa *Testing students ability to use derivatives,integrals, and vectors in purely mathematical context and in a physical context* selvitettiin ja vertailtiin opiskelijoiden kykyä vastata derivaattoja, integraaleja ja vektoreita sisältäviin matemaattisiin kysymyksiin matemaattisessa kontekstissa ja fysiikan kontekstissa. Opiskelijoilla ilmeneni käsitteellistä sekoittamista (conceptual blending), eli opiskelija ei osaa hyödyntää uudessa kontekstissa aiemmin opittua matemaattista tietoa. Tutkijat havaitsivat, että opiskelijoilla oli vaikeuksia käsitteellistää matematiikan tehtäviä, jotka sisälsivät fysiikkaa. [1] Myös muissa tutkimuksissa on tullut ilmi käsitteellistä sekoittamista integraaleja sisältävissä ongelmissa [11, 23]. Silloinkin, kun opiskelijat ovat suorittaneet matematiikan kurssit onnistuneesti, heillä voi olla vaikeuksia käyttää samoja matemaattisia työkaluja fysiikan yhteydessä [6].

Vaikka visuaaliset vihjeet viittaavat matematiikan ja fysiikan rinnakkaisten kysymysten samankaltaisuuteen, opiskelijat soveltavat joskus eri strategioita ratkaistakseen fysiikan ja matematiikan tehtäviä. Fysiikkaa sisältävissä matematiikan tehtävissä opiskelijoita häiritsevät fysiikan käsitteet matematiikan yhteydessä. Opiskelijoilla on myös vaikeuksia ymmärtää kinemaattisten suureiden välistä suhdetta, mikä tulee erityisen merkitykselliseksi, kun kuvaajia on mukana tehtävänannossa. [1] Useamman tutkmuksen [1, 11, 13, 23] mukaan opiskelijat keskittyvät integraalien yhteydessä vain laskennalliseen osuuteen sen sijaan, että yrittäisivät ymmärtää matemaattista ongelmaa tai integraalin käsitettä. Oppilaat luonnehtivat integraalia työkaluna tai tekniikkana ratkaista erilaisia yhtälöitä tehokkaasti [13]. Matematiikan rakenteellisen roolin korostamista ehdotetaan sen sijaan, että keskitytään yksittäisiin, automatisoituihin ongelmanratkaisumenettelyihin, joissa matematiikalla on vain tekninen rooli [1]. Tämän vuoksi fysiikkaa ja muita oppiaineita tulee hyödyntää matemaattisissa ongelmissa, jotta opiskelijat osaavat soveltaa opittuja asioita eivätkä hämmenny erilaisissa konteksteissa esiintyvää matematiikkaa kohdatessaan. Harjoitustehtävässä 11 opiskelija laskee Enontekiön kunnan väkiluvun kasvunopeuden perusteella [24], jolloin integraalin laskeminen tulee eri kontekstissa esille. Lisäksi integraalin käsitteen yhteydessä kehoitetaan esimerkiksi integraalissa olevan termin *dx* avaamista [9]. Pohdintatehtävässä A.22, opiskelijat integroivat kiihtyvyyden ajan suhteen ja siinä havainnollistuu termin *dx* merkitys käytännössä. Myös pohdintatehtävässä A.20 oppilas selvittää funktion integraaleja eri merkintätapojen kautta.

Artikkelissa *Analysis of students' difficulties in solving integration problems* todettiin oppilailla esiintyvän käsitteellisten virheiden lisäksi matemaattisia ja teknisiä virheitä [11]. Nämä virheet johtuvat useimmiten matemaattisten laskusääntöjen huomiotta jättämisestä tai huolimattomuudesta. Opiskelijat suorittivat esimerkiksi vakiolla kertomisen sulkujen sisään ennen integraalin laskemista ja vieläpä virheellisesti. Syy matemaattisten laskusääntövirheisiin voisi olla se, ettei opiskelijoilla ollut matemaattista tietämystä muista matematiikan aiheista. Tämä oli tutkimuksessa yllättävää, sillä opiskelijoiden odotettiin saavuttaneen tietyn osaamistason muissa matematiikan aihealueissa. Opiskelijat olivat mahdollisesti unohtaneet aiemmin opitut matematiikan aihealueet. [11] Lisäksi ilmeni menettelyvirheitä kuten yhdistetyn funktion integroinnissa sisäfunktion derivaatalla kertomisen unohtamista. Johdattelevan pohdintatehtävän A.25 jälkeen siirrytään pohdintatehtävään A.27, jossa opiskeljat tarkastelevat ratkaisussa ilmeneviä virheitä ja lopuksi itse integroivat annetun funktion välivaiheineen. Ratkaisun välivaiheiden merkitystä korostetaan Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 [16] ratkaisun perustelemisen taitona ja ylioppilaskirjoituksissa vaaditaankin välivaiheet tai perustelut näkyviin ratkaisussa.

Viestintätaitojen merkitys korostuu matematiikassa. Matematiikan viestintätaitoja ovat esimerkiksi lukeminen, kirjoittaminen, puhuminen ja mallinnus. Nämä ovat tärkeitä taitoja, koska ne auttavat opiskelijoita ilmaisemaan ajatuksensa selkeästi ja järjestämään ne johdonmukaisesti. Siksi opettajat voivat pyytää opiskelijoita kirjoittamaan tehtävien yhteydessä, mitä he ajattelevat tietyistä käsitteistä tai ideoista ja keskustelemaan niistä sitten toisten opiskelijoiden kanssa. Opiskelijoita voidaan myös pyytää asettamaan kysymyksiä, koska tämä edellyttää korkeamman tason ajattelun taitoja. [11] Tämä näkökulma tulee otettua huomioon pohdintatehtävässä A.27, jolloin opiskelija joutuu miettimään, miten tehtävän ratkaisijat Pirjo ja Liisa ovat ajatelleet.

3.3 Trigonometristen funktioiden integrointi

Monet tutkimukset osoittavat, että vaikeudet integraalilaskennassa liittyvät usein oppilaiden kykyyn ymmärtää trigonometrisia funktioita [3, 4, 11]. Usein oppilailla on hallussa perustiedot integrointimenetelmistä, mutta ei teknisiä taitoja trigonometristen funktioiden käsittelystä [4]. Tutkimuksissa [11, 17] testattiin trigonometristen funktioiden integroimista, ja osa opiskelijoista ei muistanut trigonometristen funktioiden ominaisuuksia. He myös joko unohtivat trigonometristen funktioiden integroimiskaavat tai he olivat saaneet liian vähän harjoitusta niistä. [11, 17]

Myös artikkelissa *Investigating students' learning difficulties in integral calculus* esitellyssä tutkimuksen kyselyssä vastaajia pyydettiin järjestämään kuusi vaikeinta integroimiskaavaa vaikeusasteen mukaan. Enemmistö vastasi trigonometristen funktioiden integraalien muunnoksien olevan vaikeimpia. [4] Trigonometristen kaavojen hyödyntäminen tuottaa haasteita [11, 4, 5], sillä oppilailla oli vaikeuksia tunnistaa vastaavia lausekkeita. Lisäksi haastavaa oli ymmärtää, mitkä muunnokset ovat sallittuja ja mitkä tulisi tehdä annetun yhtälön yhteydessä. Opiskelijoiden on vaikea tunnistaa, palauttaa mieleen ja käyttää sopivaa trigonometristä peruskaavaa. Tätä vaikeutta ilmeni tehtävässä, jossa oppilaiden oli integroidakseen muokattava trigonometristä funktiota peruskaavoja hyödyntämällä. [5] Huomioidaan tämä näkökulma pohdintatehtävässä A.33, jossa opiskelija tarkastelee Matin ratkaisua ja kirjoittaa välivaiheet näkyviin. Tässä tehtävässä tulee esille myös jo aikaisemminkin mainittu ratkaisujen perusteleminen niin sanallisesti kuin algebrallisesti, mikä on Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 [16] mukaista.

Yleisesti ottaen opiskelijoilla ei ole ymmärrystä trigonometristen funktioiden ominaisuuksista. Lisäksi algebralliset virheet trigonometristen funktioiden yhteydessä osoittavat, että heillä on vain vähän käsitteellistä ymmärrystä trigonometrisistä funktioista. [3, 25] Opiskelijoiden käsitystä trigonometristen funktioiden saralla tulisi vahvistaa tarjoamalla erilaisia tehtäviä, jolloin opiskelijat voivat muodostaa monipuolisen käsityksen niin algebrallisesti kuin graafisesti trigonometristen funktioiden integroinnista. Artikkelissa *The impact of algebra and trigonometry to calculus perfor-mance* kehoitetaan opettajia ottamaan huomioon, että heidän oppilaansa voisivat oppia parhaiten, kun opettaja tarjoaa ongelmapohjaista opetusta. Näin oppilaat voivat tutkia matemaattista sisältöä tavalla, joka kehittää sekä opiskelijoiden käsitteellistä että menettelytapaan liittyvää ymmärrystä matematiikassa. [5]

Kuten aikaisemmissakin aihealueissa on mainittu integraalin ja derivaatan käsitteiden sekoittamista, myös trigonometristen funktioiden integroinnissa on huomattu tätä samaista sekoittamista. Useimmat kyselyihin vastanneista lisäsivät trigonometristen funktioiden integroimisessa negatiivisen merkin vaikka ei pitäisi ja päinvastoin. [3, 11] Trigonometria on matematiikan alue, jonka opiskelijat kokevat erityisen vaikeaksi ja abstraktiksi verrattuna muihin matematiikan aiheisiin. [4] Harjoitustehtävässä 14 opiskelija korjaa yleisimmät virheet trigonometristen funktioiden integroimisessa, jolloin virheiden kautta hän oppii itse niitä välttämään.

Analysoimalla opiskelijoiden suorituksia tutkimuksissa voidaan nähdä, että opiskelijat kamppailevat usein integraalilaskennan kanssa. Opiskelijat suoriutuvat usein heikoimmin trigonometristen integraalien ratkaisemisessa. Yksi tapa opetuksessa on keskittyminen visuaalisen puolen selittämiseen. Siten visuaalisten näkökulmien vahvistamisen kautta opiskelijoiden integraalilaskenta kehittyy. [3] Pohdintatehtävässa A.31 opiskelija yhdistää funktion kuvaajalle sopivan integraalifunktion kuvaajan, jolloin hän hyödyntää aikaisemmassa aihealueessa opittua visuaalista näkökulmaa. Lisäksi visuaalinen ja algebrallinen näkökulma yhdistyvät, kun opiskelija yhdistää kuhunkin integraalifunktion kuvaajaan sopivan lausekkeen. Lisäksi mallitehtävässä A.32 käydään läpi GeoGebra-ohjelmiston hyödyntämistä trigonometristen funktioiden integraalien ratkaisemissa. Näin ollen vaikeampiakin tehtäviä kohdatessaan opiskelijat oppivat ohjelmistojen kautta tarkastelemaan integraaleja.

Koska trigonometristen funktioiden integrointi on haastavaa, tulee sen opiskeluun käyttää enemmän aikaa [17]. Trigonometristen funktioiden integraalilaskennalle on siitä syystä varattu oma kappele. Trigonometristen funktioiden integrointi aloitetaan kahdella johdattelevalla pohdintatehtävällä A.28 ja A.29. Trigonometriset funktiot on valittu viimeiseksi kappaleeksi tässä oppikirjassa, sillä trigonometristen funktioiden integroimisessa hyödynnetään yhdistetyn funktion integrointia.

Viitteet

[1] Marta Carli, Stefania Lippiello, Ornella Pantano, Mario Perona, and Giuseppe Tormen. Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context. *Physical Review Physics Education Research*, 16(1):1–17, 2020.

[2] Al Cuoco, E Paul Goldenberg, and June Mark. Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4):375–402, 1996.

[3] Mohammad Darvisahzadeh, Ahmad Shahvarani Semnani, Hassan Alamolhodaei, and Hassan Behzadi. Analysis of students' mistakes in solving integrals to minimize their mistakes. *Control and Optimization in Applied Mathematics*, 4(2):49–60, 2019.

[4] Flordeliza P. Ferrer. Investigating students' learning difficulties in integral calculus. *PEOPLE: International Journal of Social Sciences*, 2(1):310–324, 2016.

[5] Flordeliza P Ferrer. The impact of algebra and trigonometry to calculus performance. *Asian J Multidiscip Stud*, 5(8):1–7, 2017.

[6] NV Harini, Y Fuad, and R Ekawati. Students' covariational reasoning in solving integrals' problems, 1–7. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 947. IOP Publishing, 2018.

[7] Nourooz Hashemi, Mohd Salleh Abu, Hamidreza Kashefi, Mahani Mokhtar, and Khadijeh Rahimi. Designing learning strategy to improve undergraduate students' problem solving in derivatives and integrals: A conceptual framework. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(2):227–238, 2015.

[8] Dae S Hong. Best known problem solving strategies in 'high-stakes' assessments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(6):823–829, 2011.

[9] Steven R Jones. Understanding the integral: Students' symbolic forms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2):122–141, 2013.

[10] Jorma Joutsenlahti. *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä-1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä*. Tampere University Press, 2005.

[11] Seah Eng Kiat. Analysis of students' difficulties in solving integration problems. *The Mathematics Educator*, 9(1):39–59, 2005.

[12] Pekka Kupari, Jouni Välijärvi, Pirjo Linnakylä, Pasi Reinikainen, Viking Brunell, Kaisa Leino, Sari Sulkunen, Jukka Törnroos, Antero Malin, and Eija Puhakka. Osaaminen kestävällä pohjalla: Pisa 2003 suomessa. 2005. Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos.

[13] N Metaxas. Difficulties on understanding the indefinite integral. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 265–272, volume 3. ERIC, 2007.

[14] La Misu, I Ketut Budayasa, and Agung Lukito. Profile of metacognition of mathematics and mathematics education students in understanding the concept of integral calculus. In *Journal of Physics: Conference Series*, 1–8, volume 974. IOP Publishing, 2018.

[15] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. 2015.

[16] Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. 2019.

[17] Sri Satriani, Nur Humaerah Halim Wahyuddin, and Ahmad Syamsuadi. The analysis of compliance type students error in resolving integral challenge of trigonometry function. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 66(10):14–19, 2020.

[18] Alan H Schoenfeld. Presenting a strategy for indefinite integration. *The American Mathematical Monthly*, 85(8):673–678, 1978.

[19] Malcolm Swan. Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs*, 2006.

[20] Osama Swidan and Elena Naftaliev. The role of the design of interactive diagrams in teaching–learning the indefinite integral concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3):464–485, 2019.

[21] Osama Swidan and Michal Yerushalmy. Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. *ZDM*, 46(4):517–531, 2014.

[22] Djurdjica Takači, Arpad Takači, and Natalija Budinski. On visualisation problems by using the geogebra and scientific workplace packages. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(4), 2010.

[23] David Tall. Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of working group*, 13–28, volume 3, 1993.

[24] Tilastokeskus. Suomen virallinen tilasto (SVT): Väestöennuste 2019: Väestö iän ja sukupuolen mukaan alueittain, 2019-2040. https://pxnet2.stat.fi/PXWeb/pxweb/fi/StatFin/StatFin__vrm__vaenn/statfin_vaenn_pxt_128v.px/. Viitattu 31-3-2021.

[25] Keith Weber. Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3):91–112, 2005.

[26] Ylioppilaslautakunta. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä, syksy 2020. 2020.

[27] Ylioppilaslautakunta. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä, kevät 2021. 2021.

A Integraalifunktio ja alkeisfunktioiden integrointi

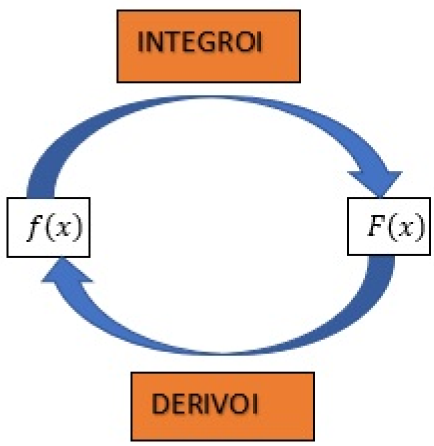
Aikaisemmalla kurssilla ollaan opittu derivointia ja tämän oppikirjan aiheena on derivaatan käänteisoperaatio, integraali. Ensimmäisessä kappaleessa tarkastelet yleisesti integraalia derivaatan käänteisoperaatiota.

A.1 Integraali derivaatan käänteisoperaationa

Pohdinta A.1

a) Derivoi funktio $f(x) = 5x^3$
b) Anna esimerkki funktiosta f , jonka derivaatta on $f'(x) = 10x^4$.
c) Funktion f derivaatta on $f'(x) = 15x^2 + 8x$. Mikä on alkuperäinen funktio f? Onko muita vaihtoehtoja?
d) Anna esimerkki funktiosta g, jonka derivaattafunktio on $g'(x) = 10x^4 - 3x^2 + 2x - 20$

Määritelmä A.2 Olkoon funktiot F ja f määriteltyjä avoimella välillä I.
Funktio F on funktion f *integraalifunktio* täsmälleen silloin,
kun f on funktion F derivaattafunktio eli $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$



Huomautus A.3 Funktion f integraalifunktiota merkitään

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Merkintä dx ilmoittaa muuttujan x suhteen integroinnin.

Pohdinta A.4

1. Mitkä seuraavista ovat funktion $f(x) = x^3 + 2x + 3$ integraalifunktioita?

   a) $\frac{1}{3}x^2 + 2$
   b) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x$
   c) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + 17$
   d) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x - 8$

2. Piirrä valitut integraalifunktiot GeoGebralla samaan koordinaatistoon.

   a) Mitä huomaat? Mitä muotoa ovat funktion $f(x) = x^3 + 2x + 3$ integraalifunktiot? Miten voisit muodostaa yleisen muodon funktion integroinnista?
   b) Hyödynnä GeoGebran liukusäädin ominaisuutta ja piirrä funktion $f(x) = x^3 + 2x + 3$ yleinen integraalifunktio.

Pohdinta A.5 Funktiot F_1 ja F_2 ovat funktion f integraalifunktioita. Tarkastele mitkä väitteistä pitävät paikkansa.

a) $F_1(x) - F_2(x) = 0$
b) $F_2(x) - F_1(x) = c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.
c) $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$
d) $F_1'(x) + F_2'(x) = 0$

Pohdinta A.6 Funktiot $F_1(x) = \dfrac{-4}{x^2+2}$ ja $F_2(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$ ovat funktion $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2+2)^2}$ integraalifunktioita.

Tarkastele edellisten väitteiden paikkansa pitävyyttä

a) laskennallisesti

b) graafisesti GeoGebran avulla (https://www.geogebra.org/classic/dab5ps5d).

Lause A.7 Olkoon funktio f määritelty välillä I. Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat muotoa

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

missä F_0 on eräs integraalifunktio ja $C \in \mathbb{R}$ on vakio, kaikilla $x \in I$.

Koska minkä tahansa vakion derivaatta on nolla niin jokainen integraalifunktio eroaa muista integraalifunktioista mielivaltaisella vakiolla c. Vakiota c kutsutaan integroimisvakioksi.

Lisätieto A.8 Integraalia $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ kutsutaan määräämättömäksi integraaliksi, sillä se antaa tulokseksi funktion.

Mallitehtävä A.9 Etsi funktiolle $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$ integraalifunktio F , joka kulkee pisteen (-2,-5) kautta.

Ratkaisu.
Funktion kaikki integraalifunktiot löydetään integroimalla funktio f:

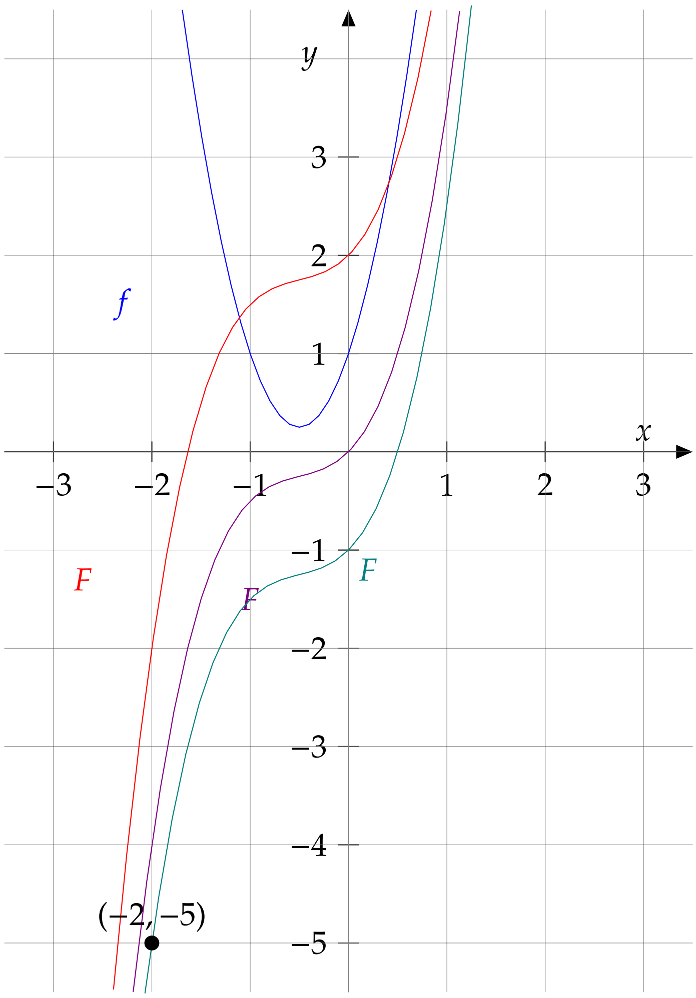
$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x^2 + 3x + 1)\,dx = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

Integraalifunktio F kulkee pisteen (-2,-5) kautta, kun $F(-2) = -5$
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio C :

$$
\begin{aligned}
F(-2) &= -5 \\
(-2)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + (-2) + C &= -5 \\
-8 + \frac{3}{2} \cdot 4 - 2 + C &= -5 \\
-8 + 6 - 2 + C &= -5 \\
-4 + C &= -5 \\
C &= -5 + 4 = -1.
\end{aligned}
$$

Eli funktion f integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(-2, -5)$ kautta, on

$$F(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + x - 1$$



Pohdinta A.10

a) Derivoi funktio $f(x) = x^2$.

b) Anna esimerkki funktiosta g, jonka derivaatta on $g'(x) = x^2$.

c) Anna esimerkki funktiosta g, jonka derivaatta on $g'(x) = x^4$.

Lause A.11 Monomin integrointi

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \geq 0, C \in \mathbb{R} \text{ on vakio.}$$

Harjoitustehtävät

1. Osoita, että funktio $F(x) = -5x^2+10x-4$ on funktion $f(x) = -10x+10$ integraalifunktio.

2. $f(x) = x^3 + x^2$, niin $\int f(x)\,dx =$ ______________________________ $+C$. [S19/2.2]

3. a) Määritä funktion $f(x) = 2x - 4$ se integraalifunktio, jonka kuvaaja leikkaa x-akselin kohdassa $x = -3$.

b) Piirrä a)-kohdan integraalifunktio. Voit hyödyntää GeoGebra-ohjelmistoa.

4. a) Näytä, että molemmat funktiot $F_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ja $F_2(x) = \dfrac{x}{1-x}$ ovat funktion $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ integraalifunktioita, kun $x > 1$.

b) Sievennä erotus $F_1(x) - F_2(x)$.

[S11/4ab]

5. Millä vakion a arvolla funktio $F(x) = (3x - a)^2$ on funktion $f(x) = 18x + 4$ integraalifunktio?

A.2 Polynomi- ja yhdistetyn funktion integrointi

A.2.1 Polynomifunktioiden integrointi

Pohdinta A.12 a) Tutki GeoGebran avulla funktioiden $f(x)$, $2 \cdot f(x)$ ja $4 \cdot f(x)$ integraaleja, kun $f(x) = x$. Mitä huomaat? Tarkastele funktioiden arvoja eri pisteissä.

b) Olkoon $k \in \mathbb{R}$ vakio. Osoita derivoimalla, että $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$. Käytä merkintätapaa, jossa funktion f integraalifunktio on F.

Lause A.13 Vakiolla kerrotun funktion integraali

$$\int cf(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx, \quad C \in \mathbb{R} \text{ on vakio.}$$

Pohdinta A.14 a) Tutki GeoGebran avulla funktioiden $f(x)$, $g(x)$ ja $f(x)+g(x)$ integraaleja, kun $f(x) = x$ ja $g(x) = x^2$. Mitä huomaat? Tarkastele funktioiden arvoja eri pisteissä.

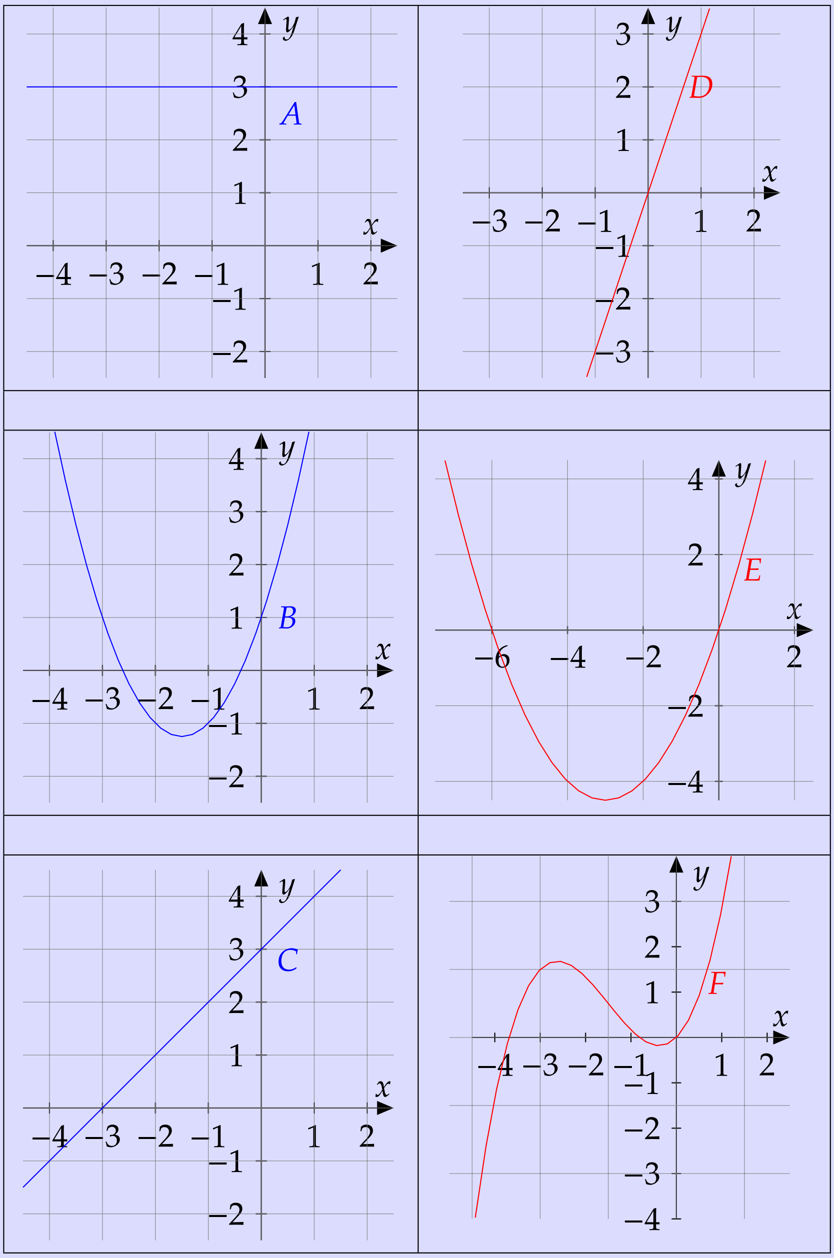
b) Osoita, derivoimalla, että $\int(f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Lause A.15 Funktioiden summan integrointi

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Pohdinta A.16

1. Yhdistä funktio A-C sopivan integraalifunktion D-F kanssa.



2. Integroi 1-kohdan kuvaajien avulla seuraavat funktiot

   a) $\int 3\,dx =$

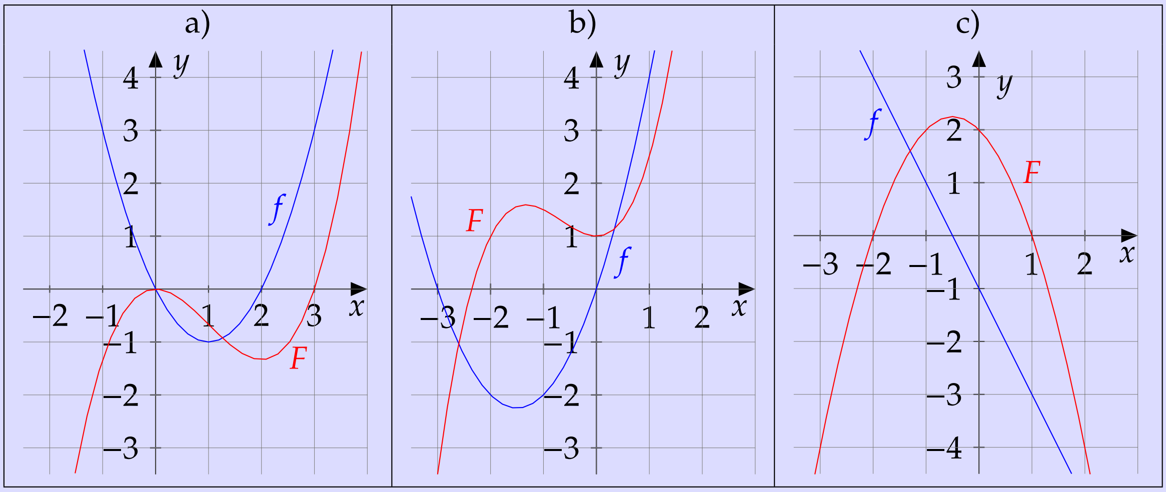
   b) $\int x + 3\,dx =$

   c) $\int x^2 + 3x + 1\,dx =$

Lause A.17 Vakion integrointi

$$\int k\,dx = kx + C,\ k \in \mathbb{R} \text{ on vakio ja } C \in \mathbb{R} \text{ on integroimisvakio.}$$

Pohdinta A.18 Alla olevissa kuvissa on esitetty kuvaajapari, funktion kuvaaja ja integraalifunktion kuvaaja. Yksi kuvaajapari ei ole pätevä. Valitse vaihtoehdoista tämä ja perustele vastauksesi.



Huomautus A.19 Integraalissa $F(x) = \int f(x)\,dx$. Merkintä dx ilmoittaa x suhteen integroinnin. Vastaavasti muuttujan t suhteen integroinnissa on merkintä dt.

Pohdinta A.20 Määritä y, kun

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5x$

b) $Dy = 2 + 3x^2$

c) $y'(x) = 4x^3 - 1$.

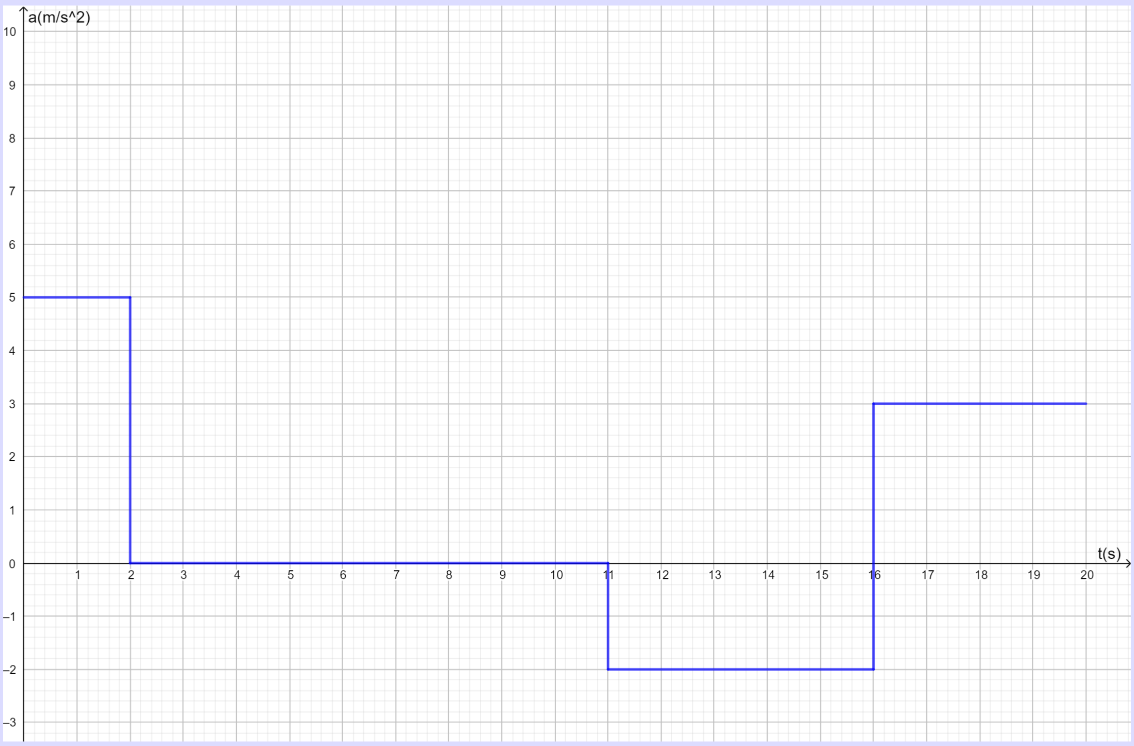
Huomautus A.21 Integraalifunktioiden merkintätavat

Funktion $f(x)$ derivaattafunktiota voidaan merkitä: $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{d}{dx}f(x)$.

Vastaavasti Integraalifunktion $F(x)$ derivaattafunktiota voidaan merkitä: $F'(x)$, $DF(x)$ tai $\frac{d}{dx}F(x)$.

Pohdinta A.22 Kiihtyvyys kuvaa kappaleen nopeuden muutosta tietyssä ajassa eli kiihtyvyys voidaan ilmaista nopeuden derivaattana ajan suhteen, $a(t) = v'(t)$.

Alla olevassa kuvaajassa on esitetty maantiepyöräilijän kiihtyvyys. https://www.geogebra.org/classic/mvwgay8c



1. Tarkastele kiihtyvyyskuvaajaa ja keskustele parisi kanssa millainen on maantiepyöräilijän kiihtyvyys ja nopeus kullakin aikavälillä
   a) 0-2 s
   b) 2-11 s
   c) 11-16 s
   d) 16-20 s

2. Piirrä maantiepyöräilijän nopeuden kuvaaja koordinaatistoon (y-akselina v(m/s) ja x-akselina t(s)).

3. Määritä nopeuden v(t) lauseke.

Mallitehtävä A.23 Määritä funktion $f(x) = 8x^2 + 5x + 2$ integraalifunktiot.
Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int (4x^2 + 2x - 2)\,dx \\
&= \int 4x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int -2\,dx \\
&= 4\int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 1\int 2\,dx \\
&= 4\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 2\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1} - 1\cdot 2x + C \\
&= \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x + C
\end{aligned}$$

Lisätieto A.24 Summaa integroitaessa riittää merkitä yksi integroimisvakio

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int (4x^2 + 2x - 2)\,dx \\
&= \int 4x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int -2\,dx \\
&= 4\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1} + C_1 + 2\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1} + C_2 - 1\cdot 2x + C_3 \\
&= \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x + C, \text{missä } C_1 + C_2 + C_3 = C
\end{aligned}$$

Riittää siis määrittää yksi integraalifunktio ja lisätä sitten integroimisvakio C.

A.2.2 Yhdistetyn funktion integrointi

Pohdinta A.25

a) Derivoi $f(x) = (3+4x^2)^3$. Kerro ja kirjoita vaiheista, miten pääsit tulokseen.

b) Merkitse a)-kohdan ratkaisuun seuraavat funktiot: $s'(x)$, $u'(s(x))$ ja $u(s(x))$.

c) Tarkastele derivaattafunktiota $f'(x) = 4x(2x^2-2)^2$. Mikä on funktion f sisäfunktion derivaatta? Entä minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 4x(2x^2-2)^2$?

d) Tarkastele derivaattafunktiota $f'(x) = x^2(-x^3+3)^5$. Mikä on funktion f sisäfunktion derivaatta? Entä minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = x^2(-x^3+3)^5$?

Lause A.26 Yhdistetyn funktion integroimissääntö.

Oletetaan, että yhdistetyn funktion $u(s(x))$ ulkofunktion u integraalifunktio on U ja sisäfunktion derivaatta on s'.

Tällöin

$$\int s'(x)\cdot u(s(x))\,dx = U(s(x)) + C, \text{ missä } C \text{ on vakio.}$$

Pohdinta A.27 a) Pirjo ja Liisa ratkaisivat funktion integroinnin seuraavasti. Tarkistuksen jälkeen molempien ratkaisut ovat virheelliset. Korjaa ratkaisuista löytyvät virheet.

Pirjon ratkaisu:	**Liisan ratkaisu:**
$\int x(3-x^2)^4\,dx$ $= \int (3x-x^3)^4\,dx$ $= \int (3-3x^2)(3x-x^3)^4\,dx$ $= \dfrac{(3x-x^3)^{4+1}}{4+1} + c$ $= \dfrac{1}{4}(3x-x^3)^5 + c$	$\int x(3-x^2)^4\,dx$ $= \int -2x(3-x^2)^4\,dx$ $= \dfrac{(3-x^2)^{4+1}}{4+1}$ $= \dfrac{1}{4}(3-x^2)^5$

b) Ratkaise integraali $\int x(3-x^2)^4\,dx$ välivaiheineen.

Harjoitustehtävät

6. Määritä y, kun

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2021$

b) $\dfrac{dy}{da} = a^2x^3$

c) $\dfrac{dy}{dz} = 2a^3z^2x$

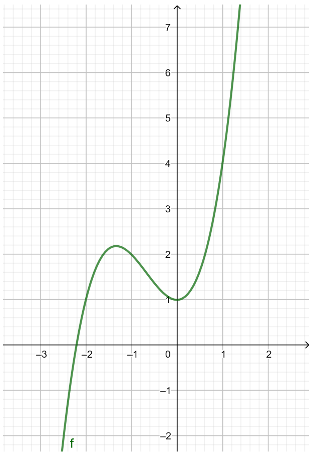
d) $\dfrac{dy}{dx} = 5t^3x^2 + 6x$

7. Laske seuraavat integraalit.

a) $\int (3tx^3 + 5t^3x)\,dx$

b) $\int (3tx^3 + 5t^3x)\,dt$

8. a) Hahmottele seuraavalle kuvaajalle jokin integraalifunktion kuvaaja.



b) Piirrä Geogebran avulla integraalikuvaaja(https://www.geogebra.org/classic/j27rbvvs).

9. Funktion $f(x) = ax^4 - 3x^2 + a$ integraalifunktion F kuvaaja kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(-1, 1)$ kautta.
Määritä vakion a arvo. Mikä on tällöin integraalifunktio F? Ratkaise

a) laskennallisesti

b) graafisesti GeoGebraa hyödyntäen.

10. Lapissa Enontekiön kunnan väkiluvun kasvunopeus on $3,1 - 3\sqrt[3]{t}$ lausekkeen mukaista vuodesta 2020 alkaen, jossa t on aika vuosina. Enontekiön väkiluku oli 1849 vuonna 2020 [24].

a) Muodosta Enontekiön kunnan väkiluvun lauseke.

b) Kuinka suuri on Enontekiön väkiluku 15 vuoden kuluttua vuodesta 2020?

c) Millaista on muuttoliike Enontekiöllä?

11. Määritä funktion $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x)^2$ se integraalifunktio F, jonka pienin arvo on -1.

A.3 Trigonometristen funktioiden integrointi

Pohdinta A.28

a) Derivoi funktio $f(x) = 2\cos(2x)$.

b) Anna esimerkki funktiosta f , jonka derivaatta on $f'(x) = 2\sin(x)$.

c) Derivoi funktio $f(x) = \sin(3x)$.

d) Anna esimerkki funktiosta f , jonka derivaatta on $f'(x) = \cos(3x)$.

Pohdinta A.29

1. Mitkä seuraavista ovat funktion $f(x) = -\cos x$ integraalifunktioita?

a) $\sin x + 17$

b) $-\sin x + 17$

c) $-\sin x - 6$

d) $\sin x + 2$

e) $-\sin x + 1$

2. Mitä muotoa ovat funktion $f(x) = -\cos x$ integraalifunktiot? Miten voisit muodostaa yleisen muodon funktion integroinnista?

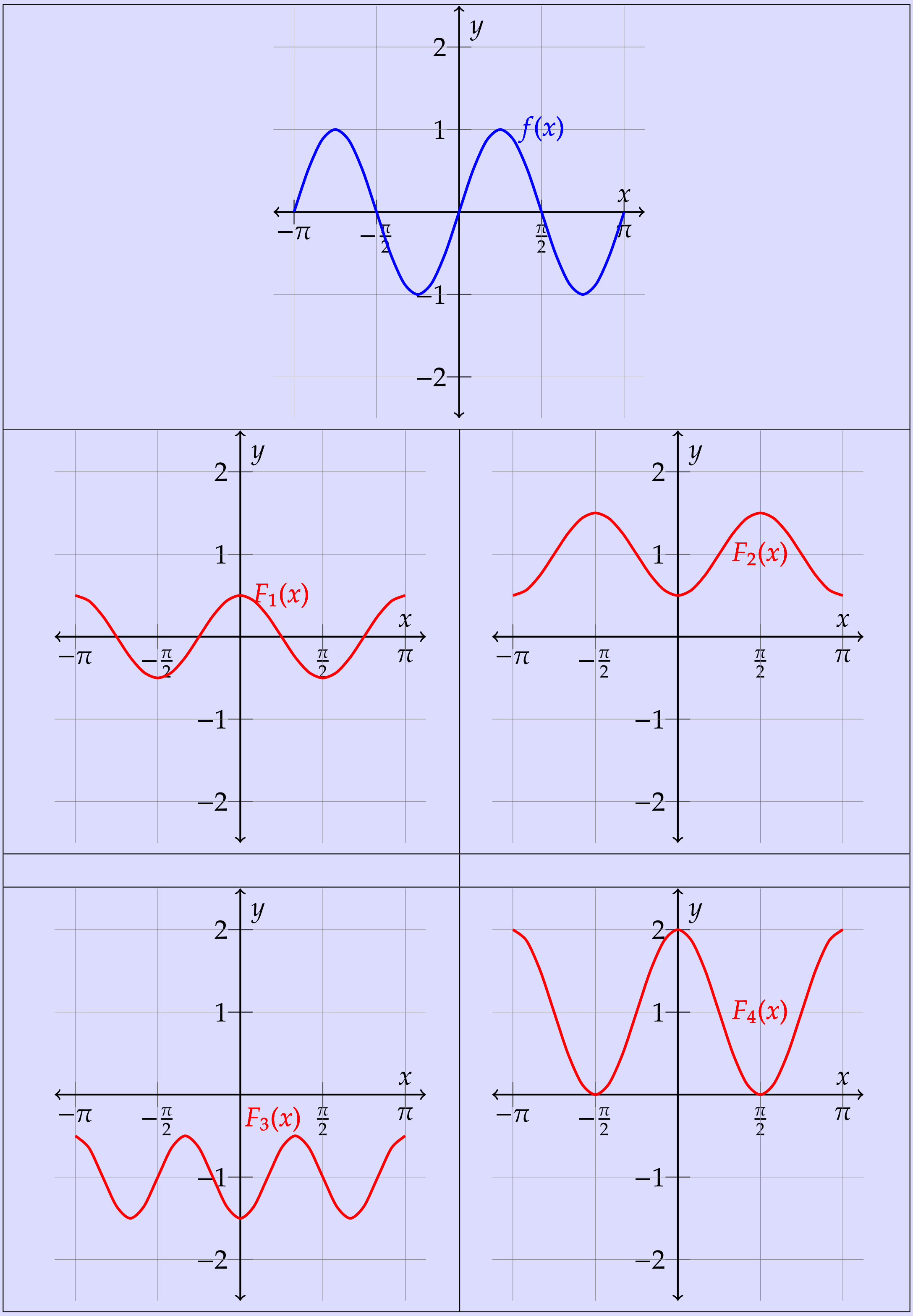
Lause A.30 Sini- ja kosinifunktion integrointi

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \text{ missä } C \in \mathbb{R} \text{ on vakio.}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \text{ missä } C \in \mathbb{R} \text{ on vakio.}$$

Pohdinta A.31

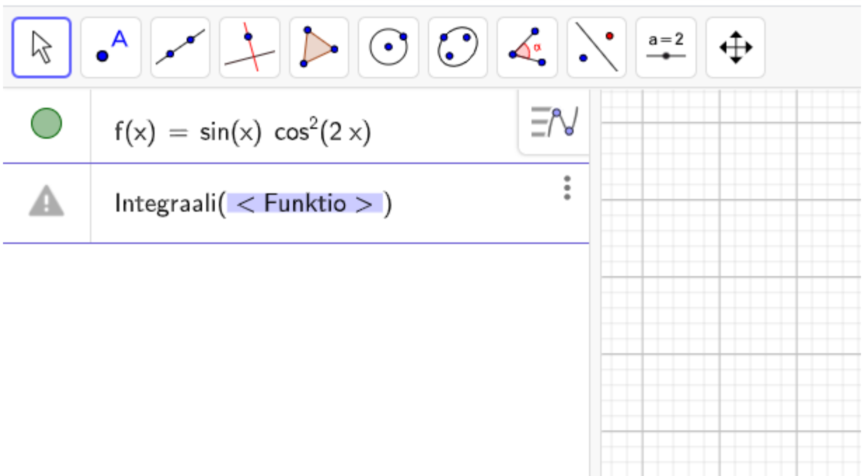
1.Valitse alla olevalle funktiolle $f(x)$ vastaavat integraalifunktiot $F(x)$.



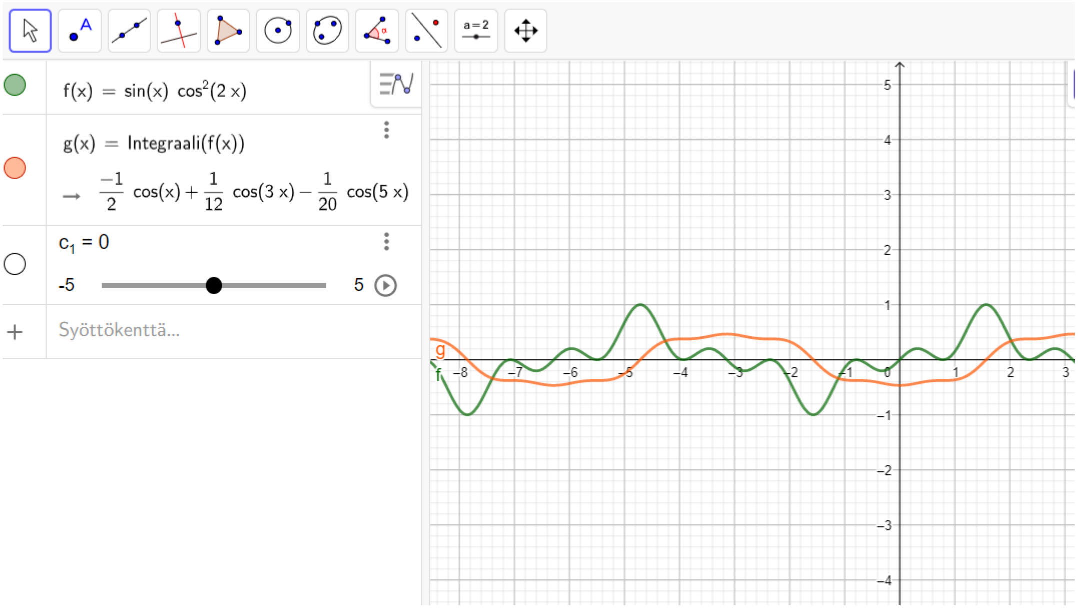
2. Yhdistä kuhunkin integraalifunktion kuvaajaan sopiva integraalifunktion lauseke:
$y = -\frac{1}{2}\cos 2x + 1$, $\quad y = \cos 2x + 1$, $\quad y = \frac{1}{2}\cos 2x$, $\quad y = -\frac{1}{2}\cos 3x - 1$.

Mallitehtävä A.32 Ratkaise GeoGebran avulla funktion $f(x) = 3\sin x\cos^3(2x)$ integraalifunktio, jolle pätee $F(\frac{\pi}{2}) = -1$.

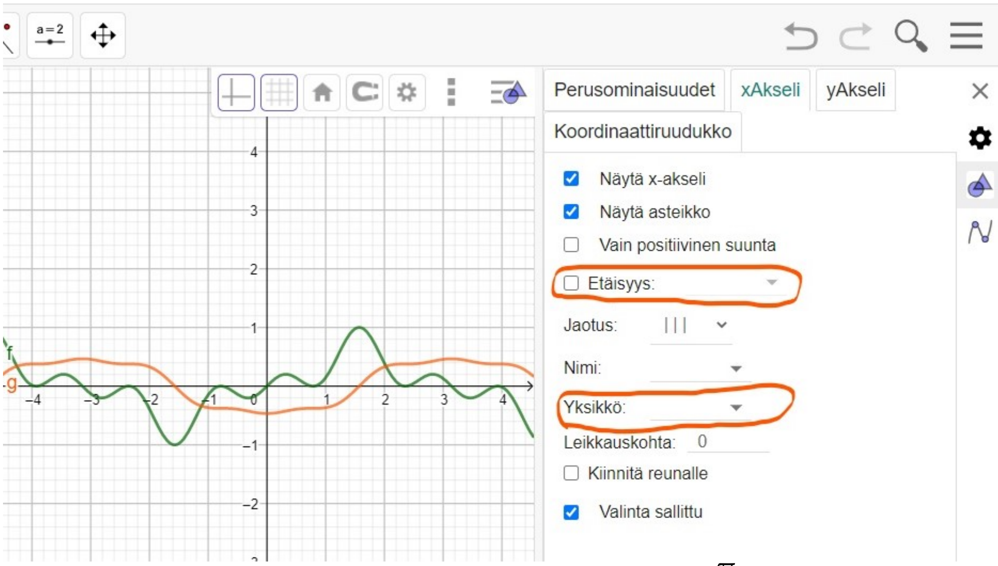
Integraalifunktiot saat laskettua *Integraali(Funktio)*-kommennon avulla. "Funktio-kohtaan voidaan kirjoittaa laskettavan funktion nimi kuten $f(x)$.



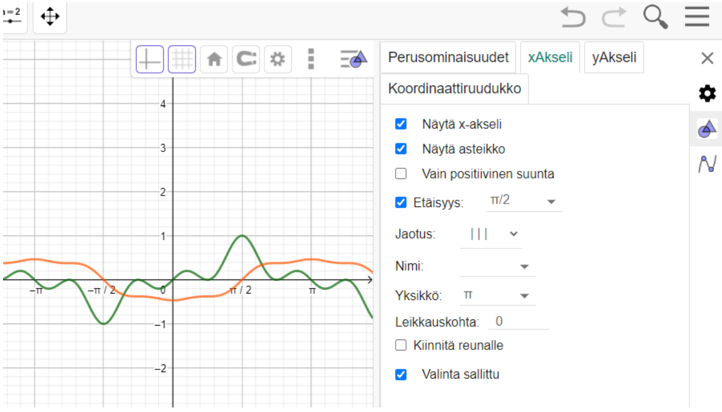
Syöte antaa Integraali-funktion, jossa integroimisvakio on Liukusäätimellä c_1.

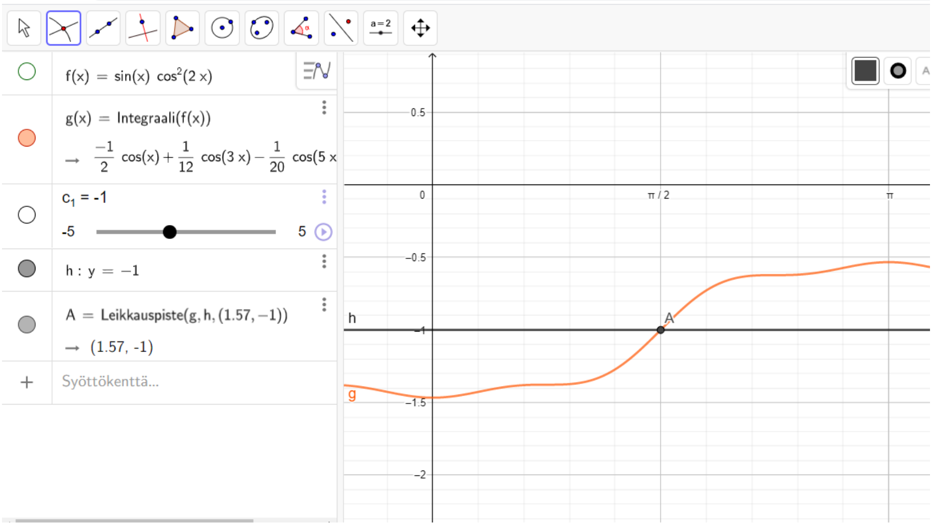


Muutetaan vielä x-akselin mittayksiköitä. Piirtoalueen asetuksista kohdasta x-akseli, muutetaan etäisyys- ja yksikkökohtaa.

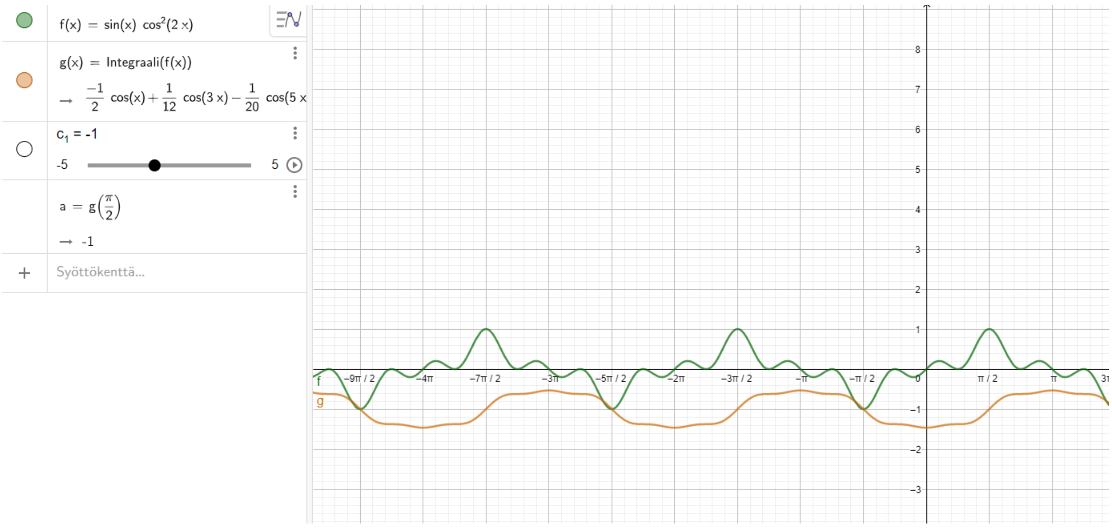


Yksiköksi valitaan π ja etäisyydeksi määritetään $\frac{\pi}{2}$(voidaan tarkastella kuvaajan arvoja tarkemmin).





Liukusäätimen arvoa muuttamalla nähdään, että integraalifunktion arvo kohdassa $\frac{\pi}{2}$ on -1, kun integroimisvakio on $c_1 = -1$. Liukusäätimen antaman arvon pätevyyttä testataan sijoittamalla tutkittava piste funktion lausekkeeseen. Integraalifunktion arvo kohdassa $\frac{\pi}{2}$ on -1 täsmälleen silloin kun, $c_1 = -1$.



Pohdinta A.33 Matti on ratkaissut seuraavat tehtävät ylioppilaskirjoituksissa. Hän on jättänyt välivaiheet merkitsemättä näkyviin, jolloin hän ei saa paljoakaan pisteistä. Tarkastele Matin vastauksia. Kerro sanallisesti, miten Matti on päässyt vastaukseen ja kirjoita välivaiheet näkyviin. Hyödynnä trigonometrisia kaavoja.

a) $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + x + c.$

b) $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c.$

c) $\int 4\sin^2 x \, dx = -1\sin(2x) + 2x + c.$

Harjoitustehtävät

12. a) Minkä funktion integraalifunktio on $\frac{1}{2}\cos(2x)$? [K09/2c]

b) Määritä funktion $4x + \cos(4x)$ kaikki integraalifunktiot. [S13/2b]

c) Kun $f(x) = 12\sin(3x)$, niin $\int f(x)\,dx =$ ________________ +C[S19/2]

13. Pirjo ja Liisa ratkaisivat tehtävän virheellisesti. Mitä virheitä Pirjo ja Liisa ovat tehneet? Korjaa tehtävät.

Pirjon ratkaisu:	**Liisan ratkaisu:**
$\int \sin 3x \cos^2(3x)\,dx$ $= -1\int -1\sin 3x\cos^2(3x)\,dx$ $= -\frac{1}{3}\cos^3(3x) + c$	$\int \sin 3x \cos^2(3x)\,dx$ $= -1\int -1\sin 3x\cos^2(3x)\,dx$ $= \sin^3(3x) + c$

14. Funktion derivaatta on $f'(x) = 2\cos x \sin^3 x$.

a) Määritä funktio f.

b) Tarkista GeoGebran avulla vastauksesi.

c) Tulkitse GeoGebra-kuvaajasta, milloin funktiolle pätee $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$?

B Opettajan opas

Opettajan opas on opettajan käyttöön tarkoitettu, jossa esitellään suuntaa antava ajankäyttösuunnitelma, oppimateriaalin oppimistavoitteet aihealueittain ja ohjeistukset pohdintatehtäviin.

B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Oppitunnit rakentuvat pohdintatehtävistä, joita voidaan tehdä yksin, parityönä tai yhdessä. Näin opiskelijoilla on mahdollisuus itsenäisesti pohtia ja edetä. Opettajan tehtävänä on varmistaa, että opiskelijat saavat apua pohdintatehtävien ratkaisuun. Oppimateriaalissa on lisäksi harjoitustehtäviä tuntitehtäviksi tai kotitehtäviksi. Alla on ehdotelma ajankäytöstä.

Tunnin aihe	45min	75min
Integraali derivaatan käänteisoperaationa	1.5	1
Polynomi- ja yhdistetyn funktion integrointi	3	2
Trigonometristen funktioiden integrointi	1.5	1

Jos aikaa on enemmän käytettävissä, suositellaan trigonometristen funktioiden integrointiin käytettävän esimerkiksi 2 x 75min.

B.2 Integraali derivaatan käänteisoperaationa

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- integraalifunktion käsite
- integroimisvakio
- yksinkertaisten funktioiden integrointi

Kappaleen oppimistavoitteena opiskelija:

- ymmärtää integraalifunktion käsitteen
- hahmottaa integraalifunktion ja derivaattafunktion yhteyden
- oppii määrittämään derivaatan avulla integraalifunktioita
- ymmärtää integroimisvakion merkityksen
- osaa määrittää tietyn integraalifunktion algebrallisesti ja graafisesti
- osaa käyttää GeoGebraa apuna tehtävien ratkaisuissa

Pohdinta A.1

Tehtävän tarkoituksena on aloittaa integraalifunktion opiskelu hyödyntämällä derivaattakurssilla opittuja taitoja. Ensin palautetaan mieleen derivointi, jonka jälkeen derivaattafunktion kautta mietitään alkuperäistä funktiota. Vaihtoehtoja funktiolle voi miettiä yhdessä keskustelemalla.

Ratkaisut:

a) $f'(x) = 15x^2$

b) $f(x) = 2x^5$

c) $f(x) = 5x^3 + 4x^2$

d) $g'(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 + 20x$

Pohdinta A.4

Tehtävässä opiskelija tarkastelee funktiolle integraalifunktioita eri vaihtoehtojen kautta. Tehtävän tarkoituksena on, että opiskelija ymmärtää integroimisvakion merkityksen. Lisäksi hän oppii GeoGebran avulla ratkaisemaan integraalifunktioita. Voi olla hyödyllistä käydä yhdessä läpi tarvittavat komennot kuten *Integraali(<Funktio>)*.

Ratkaisut:

1. Vastaavat integraalifunktiot b), c) ja d).

2. Yleinen muoto: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x + c$.

Pohdinta A.5

Tehtävässä vahvistetaan opiskelijoiden ymmärrystä funktion ja integraalifunktion yhteydestä. Lisäksi integroimisvakion merkitystä pohditaan väitteiden muodossa. Opiskelija oppii tarkastelemaan väitteiden paikkansa pitävyyttä.

Ratkaisut: Paikkansa pitävät väitteet ovat b) ja c).

Pohdinta A.6

Konkreettiset funktiot helpottavat opiskelijan ymmärrystä aikaisemmasta tehtävästä. Tehtävän tarkoituksena on havainnollistaa integroimisvakion merkitystä, jotta opiskelijat huomaavat integraalifunktioiden poikkeavan toisistaan. GeoGebran käytössä opiskelija harjaantuu ja oppii tulkitsemaan kuvaajia. Voidaan varmistaa oppilaiden oikeinymmärrys keskustelemalla lopuksi oikeista ratkaisuista.

Ratkaisut:

1. Derivoidaan funktiot $F_1(x)$ ja $F_2(x)$, jolloin $F_1'(x) = f(x) = \dfrac{8x}{(x^2+2)^2}$ ja $F_2'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+2)^2}$, jolloin väitteen c) paikkansa pitävyys on tarkasteltu. $F_2(x) - F_1(x) = 1$, joten väitteen b) paikkansa pitävyys on tarkasteltu.

Pohdinta A.10

Tehtävän tarkoituksena on oppia integroimaan monomifunktiota. Viimeistään tässä tehtävässä voi opiskelijoille kertoa tarkistamisesta integraalifunktion derivaatan avulla.

Ratkaisut:

a) $f'(x) = 2x$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3$

c) $g(x) = \frac{1}{5}x^5$

B.3 Polynomi- ja yhdistetyn funktion integrointi

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- vakiolla kerrotun funktion integraali
- funktioiden summan integrointi
- vakion integrointi
- polynomifunktion integrointi
- yhdistetyn funktion integrointi

Kappaleen oppimistavoitteena opiskelija:

- osaa integroida polynomifunktioita
- hahmottaa integraalifunktion ja funktion kuvaajien yhteyden
- osaa yhdistää integraalifunktion käsitettä myös tilanteisiin, joissa koordinaatiston akselit ovat jotakin fysikaalista suuretta
- osaa hyödyntää GeoGebraa apuna tehtävien ratkaisuissa
- osaa ratkaista fysiikkaa sisältäviä integraalitehtäviä
- hallitsee yhdistettyjen funktioiden integroinnin
- kehittää argumentoititaitojaan

Pohdinta A.12

Tehtävän tarkoituksena on havainnollistaa vakiolla kerrotun funktion integraalia. Opiskelija piirtää GeoGebran avulla funktiot ja tarkastelee funktioiden arvoja eri pisteissä. Voidaan tarkastella funktioiden arvoja pisteessä $x = -2$.

Ratkaisut:

a) Huomataan, että vakiolla kerrotun funktion integraalifunktio on yhtä suuri kuin vakiolla kerrottu integraalifunktio.

b) Todistetaan derivoimalla: $D(k\int f(x)\,dx) = D(k(F(x)) = kD(F(x)) = k\cdot f(x)$, merkitään $\int f(x)\,dx = F(x)$.

Pohdinta A.14

Opiskelija tutkii kahden eri funktion ja niiden summafunktion integraalifunktion kuvaajia ja päättelee, että integraalifunktiot voidaan summata, jolloin saadaan summafunktion integraali. Voidaan tarkastella funktion arvoja esimerkiksi pisteissä $x = 1$ ja $x = -1$.

Ratkaisu:

Merkitään $\int f(x)\,dx = F(x)$ ja $\int g(x)\,dx = G(x)$. Osoitetaan derivoimalla: $D(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx) = D(F(x) + G(x)) = f(x) + g(x) = D(\int(f(x) + g(x))\,dx)$.

Pohdinta A.16 Tehtävä sisältää kolme kuvaajaa, joiden integraalifunktiot pitäisi tunnistaa vieressä olevien funktioiden joukosta. Lisäksi 2-kohdassa opiskelija integroi funktiot kuvaajien avulla.

Ratkaisut:

1. Kuvaparit: A-D, B-F ja C-E.

2. a) $3x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,
   b) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,
   c) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Pohdinta A.18

Tehtävästä kahdessa kuvassa on funktion integraalifunktio ja kolmannessa ei (b)-kuva). Opiskelijat voivat pareittain keskustelemalla käydä läpi miten tunnistaa funktion integraalifunktion. Kun funktion arvo on nolla, niin integraalifunktion muutosnopeus on nolla. Eli kun funktio leikkaa x-akselin, integraalifunktiossa tulisi olla "tasainen"kohta.

Ratkaisu: b)-kuvaaja

Pohdinta A.20 Tehtävän tarkoituksena on opettaa oppilaille erilaisia tapoja merkitä integrointia.

Ratkaisut:

a) $y = \frac{5}{2}x^2 + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

b) $x^3 + 2x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

c) $x^4 - x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

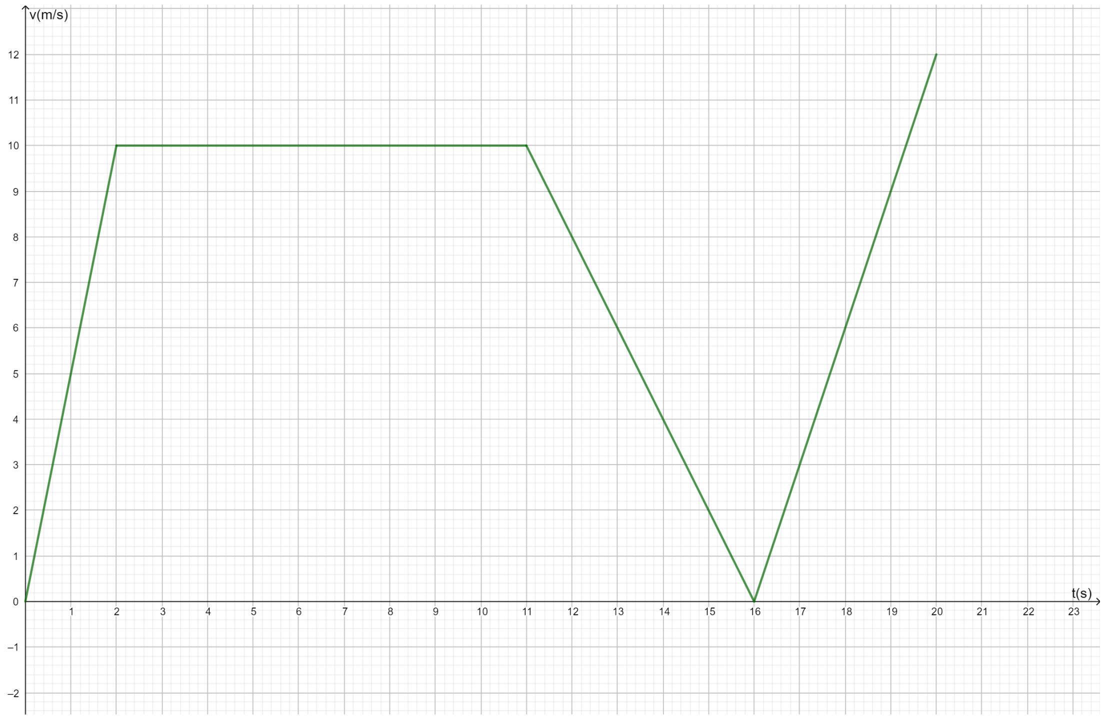
Pohdinta A.22

Tehtävä haastaa oppilaita hyödyntämään integraalifunktion käsitettä fysiikan aihepiiriin. Alkuun voi opiskelijoita pyytää lukemaan tehtävänanto hyvin, jonka jälkeen opiskelijat voivat esimerkiksi pareittain tarkastella kiihtyvyyden kuvaajaa ja miettiä, millaista maantiepyöräilijän nopeus olisi kiihtyvyyden perusteella. Sen jälkeen opiskelijat muodostavat nopeuden kuvaajan hyödyntämällä esimerkiksi GeoGebraa. Heitä voi opastaa tarkastelemaan, millaisista funktioista kuvaaja koostuu.

Ratkaisut:

1. a) kiihtyvyys tasaista, jolloin nopeus kasvaa levosta $10m/s$ aikavälillä 0-2 s
   b) kiihtyvyys on nollassa, joten nopeus on tasaista aikavälillä 2-11 s
   c) kiihtyvyys on negatiivista (hidastuvuus), jolloin nopeus pienenee aikavälillä 11-16 s
   d) kiihtyvyys positiivista, jolloin nopeus kasvaa aikavälillä 16-20 s.

2.



https://www.geogebra.org/classic/uvhf3ucy

3. Koska $a(t) = v'(t)$ eli $v'(t) = a(t)$, niin $v(t) = at + v_0$, v_0 on nopeus ajan hetkellä t_0.

Pohdinta A.25

Tehtävän tarkoituksena on oppia derivaatan kautta yhdistetyn funktion integrointi. Kohdissa a) ja b) opiskelija reflektoi omia ratkaisunvaiheitaan. Kohdissa c) ja d) opiskelijalle annetaan derivaattafunktio ja hänen miettii ensin funktion sisäfunktiota. Tämän jälkeen haastetaan opiskelijaa miettimään alkuperäistä funktiota. Kahden tehtävän jälkeen oppilas huomaa, että integroinnissa sisäfunktion derivaatta ikään kuin häviää ratkaisusta.

Ratkaisut:

a) $D((3+4x^2)^3) = 3(3+4x^2)^2 \cdot 8x$,

b) $D(u(s(x))) = u'(s(x)) + s'(x)$,

c) Sisäfunktion derivaatta on $s'(x) = 4x$. Funktio on $f = \frac{1}{3}(2x^2-2)^3 + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

d) Sisäfunktion derivaatta on $s'(x) = -3x^2$. Funktio on $f = -\frac{1}{18}(-x^3+3)^6 + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Pohdinta A.27

Tehtävän tarkoituksena on yleisimpien virheiden kautta opettaa opiskelijoille yhdistetyn funktion integrointia. Opiskelijat tarkastelevat kriittisesti ratkaisuja ja korjaavat virheet ratkaisuista. Lopuksi integroidaan itse samainen integraali.

Ratkaisut:

a) Pirjo on kertonut muuttujan x sulkujen sisään virheellisesti, sillä suluissa oleva termi on korotettuna potenssiin neljä. Lisäksi vastauksessa tulisi olla $\frac{1}{5}$ eikä $\frac{1}{4}$(laskuvirhe). Liisa on unohtanut integroidessa kertoa $-\frac{1}{2}$, sillä hän on lisännyt -2 muuttujan x eteen (sisäfunktion derivaatta). Myös integroimisvakio puuttuu. Lisäksi Liisa on tehnyt saman laskuvirheen kuin Pirjo ja kirjoittanut $\frac{1}{5}$ sijaan $\frac{1}{4}$.

b) $\int x(3-x^2)^4\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^4\,dx = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(3-x^2)^{4+1}}{4+1} + c = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}(3-x^2)^5 + c$
$= -\dfrac{1}{10}(3-x^2)^5 + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

B.4 Trigonometristen funktioiden integrointi

Kappaleen keskeiset sisällöt:

- trigonometristen funktioiden integrointi
- trigonometristen integraalifunktioiden graafinen tulkinta

Kappaleen oppimistavoitteena opiskelija:

- osaa integroida trigonometrisia funktioita
- oppii hyödyntämään trigonometrisia peruskaavoja tehtävien ratkaisuissa
- osaa hyödyntää GeoGebraa apuna tehtävien ratkaisuissa
- tulkitsee trigonometristen integraalifunktioiden kuvaajia

- osaa hyödyntää yhdistetyn funktion integrointia myös trigonometrisiin funktioihin

- kehittää perustelemisen taitoja

Pohdinta A.28

Tehtävän tarkoituksena on kerrata trigonometristen funktioiden derivointia, jolloin integroinnin ja derivoinnin sekoittamiseta vältytään. Vastaavasti kuin aikaisemmissakin kappaleissa johdatellaan derivoinnin kautta integraaliin. Erityisesti voi yhdessä miettiä yleisiä virheitä, kuten onko miinusmerkki oikeassa paikassa.

Ratkaisut:

a) $f'(x) = -4\sin(2x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

b) $f(x) = -2\cos(x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

c) $f'(x) = 3\cos(3x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio,

d) $f'(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Pohdinta A.29

Tehtävässä opiskelija ymmärtää integroimisvakion merkityksen myös trigonometristen funktioiden integroinnissa.

Ratkaisut:

1. b), c) ja e).
2. $\int(-\cos x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Pohdinta A.31

Tehtävässä opiskelija harjaantuu tulkitsemaan integraalifunktioiden kuvaajia. Opiskelijoita voi auttaa esimerkiksi nollakohtia tarkastelemalla. Jos osalle opiskelijoista ei sekään vinkki auta, niin heitä voi pyytää tarkastelemaan integraalifunktion kuvaajia ja miettimään niille derivaattakuvaajaa. Lisäksi voi vinkata heitä pohtimaan, miten integraalifunktion arvot käyttäytyvät, kun funktio on x-akselin yläpuolella tai vastaavasti x-akselin alapuolella.

Ratkaisut:

1. Kuvaaja $F_2(x)$ on vastaava integraalifunktion kuvaaja,
2. $F_1(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 1$, $F_3(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - 1$ ja $F_4(x) = \cos 2x + 1$

Pohdinta A.33

Tehtävän tarkoituksena on haastaa opiskelijoita tarkastelemaan Matin ratkaisua ja kirjoittamaan välivaiheet näkyviin. Lisäksi tehtävässä havainnollistetaan trigonometristen kaavojen hyödyntämistä.

Ratkaisut:

a) $\int(\sin x + \cos x)^2\,dx = \int(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx = \int(1 + 2\sin x\cos x)\,dx = \int(1+\sin 2x)\,dx = \int 1\,dx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Matti on ensin suorittanut neliöön korotuksen, jonka jälkeen hän on hyödyntänyt peruskaavaa $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Tämän jälkeen hän on hyödyntänyt kaavaa $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Integroimisessa hän on huomioinut sisäfunktion derivaatan ja lisännyt kertoimen $\frac{1}{2}$ integraalin eteen. Sen jälkeen hän on suorittanut integroinnin. Hänen pitäisi lisätä ratkaisuunsa integroimisvakion määritys.

b) $\int \cos^2 x\,dx = \int(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2})\,dx = \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Matti on hyödyntänyt kaavaa $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, josta saadaan $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$. Tämän jälkeen hän on integroinut $\frac{1}{2}\cos 2x$ ja $\frac{1}{2}$. Lisäksi hän on lisännyt $\cos 2x$ sisäfunktion derivaatan ($D(2x) = 2$) ja sitä kautta kertoimen $\frac{1}{2}$ integraalin eteen. Lopuksi hän on suorittanut integroinnin. Hänen pitäisi ratkaisuunsa lisätä integroimisvakion määritys.

c) $\int 4\sin^2 x\,dx = 4\int \sin^2 x\,dx = 4\int(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2})\,dx = 4\cdot(-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx) = 4\cdot(-\frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx + \int \frac{1}{2}\,dx) = -4\cdot(-\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}) = -1\sin(2x) + 2x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

Matti on hyödyntänyt kaavaa $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, josta saadaan $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$, ja vastaavasti kuin aikaisemmin huomioinut sisäfunktion derivaatan ja suorittanut integroinnin. Hänen pitäisi lisätä ratkaisuunsa integroimisvakion määritys.

C Tehtävien vastaukset

Integraali derivaatan käänteisoperaationa

1. Derivoimalla.

2. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

3. $F(x) = x^2 - 4x + 4$

4. Derivoimalla F_1 ja F_2.

5. $a = -\frac{2}{3}$

Polynomi- ja yhdistetyn funktion integrointi

6.

a) $y = 2021x + c$,

b) $y = \frac{1}{3}x^3a^3 + c$,

c) $y = \frac{2}{3}a^3xz^3 + c$,

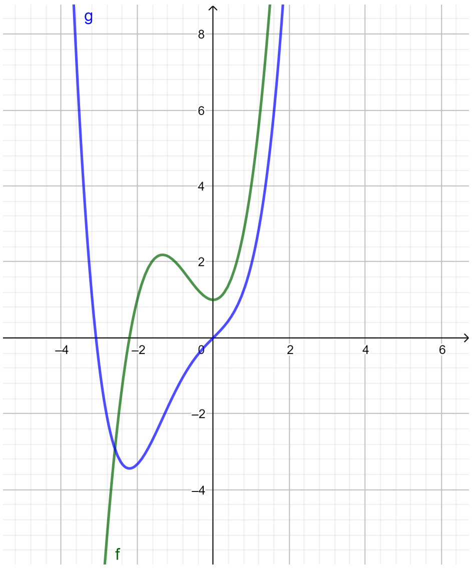
d) $y = \frac{5}{3}x^3t^3 + 3x^2 + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

7.

a) $\frac{3}{4}tx^4 + \frac{5}{2}t^3x^2 + c$,

b) $\frac{3}{2}t^2x^3 + \frac{5}{4}t^4x + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

8. Eräs integraalifunktion kuvaaja



9.

a) $a = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $F(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x + 3$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

b) https://www.geogebra.org/classic/hk8cp7z5

10.

a) $f(t) = \frac{31}{10}t - \frac{9}{4}t\sqrt[3]{t} + 1849$

b) $f(15) = 1812$

c) Poismuuttoa on havaittavissa.

11. $F(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 2x)^3 - \frac{161}{162}$

Trigonometristen funktioiden integrointi

12.

a) $-\sin(2x)$

b) $2x^2 + \frac{1}{4}sin(4x) + c,$

c) $-4\cos(3x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

13. Pirjo on huomioinut sisäfunktion derivaatan $D(\cos(x)) = -\sin(x)$, mutta unohtanut huomioida sisäfunktion kertoimen 3, jonka vuoksi vastaus ei ole oikein. Liisa on tehnyt saman virheen ja lisäksi hän on derivoinut vielä $\cos^2(3x)$. Lisäksi integroimisvakio tulisi määritellä.

Oikea ratkaisu olisi: $\int \sin 3x \cos^2(3x)\, dx = -\frac{1}{3}\int -3\sin 3x \cos^2(3x)\, dx = -\frac{1}{9}\cos^3(3x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

14.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin^4(x) + c$, missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio.

b) Kun $c = -1$ eli funktio on tällöin $f(x) = \frac{1}{2}\sin^4(x) - 1$.